جامعة البعث — امتحان مقرر الميكانيك2

كليـــة العلوم

قسم الرياضيات

السنة الثالثة رياضيات

الدورة الإضافية 2014 - 2015

اسم الطالب :

العلامة : 100 (مائة درجة)

المدة: ساعة ونصف

السؤال الأول(16درجة): اختر الإجابة الصحيحة:

1) عزم عطالة قضيب، طوله L وكتلته m بالنسبة لطرفه يساوي:

A) $\frac{mL^2}{3}$ ، B) $\frac{mL^2}{6}$ ، C) $\frac{mL^2}{12}$ ، D) كل ماسبق خطأ.

2) عزم عطالة قضيب، طوله L وكتلته m ، بالنسبة لمركز كتله، يساوي:

A) $\frac{mL^2}{3}$ ، B) $\frac{mL^2}{4}$ ، C) $\frac{mL^2}{6}$ ، D) $\frac{mL^2}{12}$.

3) عزم عطالة سلك دائري، كتلته m ، ونصف قطره r بالنسبة لمركز كتله، يساوي:

A) $\frac{mr^2}{2}$ ، B) $\frac{mr^2}{4}$ ، C) $\frac{mr^2}{6}$ ، D) mr^2.

4) عزم عطالة صفيحة دائرية، كتلتها m ونصف قطرها r بالنسبة لمركز كتلها، يساوي:

A) $\frac{mL^2}{2}$ ، B) $\frac{mr^2}{4}$ ، C) $\frac{3mr^2}{2}$ ، D) كل ماسبق خطأ.

السؤال الثاني(31 درجة): جسم صلب على شكل متوازي مستطيلات، وكل من قاعدتيه السفلية $A_1A_2A_3A_4$، والعلوية $A_5A_6A_7A_8$ مربعة الشكل وطول ضلعها $2L$، وارتفاعه L ، منسوب إلى جملة مقارنة نظامية، متماسكة معه $OX_sY_sZ_s$، فيها O مركز القاعدة السفلية، و OY_s، OX_s يوازيان ضلعيها، المطلوب:1) احسب كلاً من I_{OZ_s}، I_{OY_s}، I_{OX_s}، وما نوع المحور OZ_s؟ ، 2) أوجد جداءات العطالة $P_{Z_sX_s}$ $P_{Y_sZ_s}$ $P_{X_sY_s}$، وماذا تستنتج؟.

السؤال الثالث(15 درجة): اكتب نص النظرية الأساسية في علم حركة الجسم الصلب، وأثبت صحتها.

السؤال الرابع(16 درجة): قضيب AB ، يتحرك في المستوي الشاقولي النظامي OXY، حيث A تتحرك على OX، و B تتحرك على OY دوماً ، المطلوب:

1) ارسم الشكل المناسب، وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة القضيب، 2) أوجد منحني القاعدة ومنحني المتدحرج.

السؤال الخامس(22 درجة): إذا كان الجسم الوارد في السؤال الثاني يتحرك حول O بحيث يبقى أحد ضلعي القاعدة يوازي المستوي الأفقي، فالمطلوب:

1) ارسم الشكل المناسب بالتفصيل وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الجسم.

2) أوجد سطح المتدحرج وسطح القاعدة.

تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح

مدرس المقرر : د.كامل محمد

كلية العلوم
قسم الرياضيات
سنة ثالثة

سلم تصحيح امتحان
ميكانيك ٢ دورة إضافية

A (1 : 16 = 4·4
D (٤ ، D (٣ ، D (٢ ،

ج١ : 31
الرسم وحدود التكامل :

$-L \leq x_s \leq L$ ، $-L \leq y_s \leq L$ ، $0 \leq z_s \leq L$ (6)

ط : لإيجاد عزوم العطالة بالنسبة للمحاور ox_s, oy_s, oz_s .
يستخدم الطالب الطريقة التي يشاء فيحصل على النتائج التالية :

$I_{x_s} = I_{y_s} = I_{z_s} = \frac{2mL^2}{3}$ (4) (4) (4)

ومن الغرض يتضح ان المحور oz_s محور تناظر هندسي للجسم ومن تعريف محور التناظر الديناميكي فإ oz_s محور تناظر ديناميكي لأن $I_{x_s} = I_{y_s}$ (علاً) (1)
طلب ثاني :
حساب جداءات العطالة : من الواضح أن $ox_s z_s$ مستوي تناظر هندسي الجسم لذلك يكون :

$P_{x_s y_s} = P_{y_s z_s} = 0$

و $oy_s z_s$ مستوي تناظر هندسي أيضاً للجسم لذلك يكون

$P_{x_s y_s} = P_{x_s z_s} = 0$

ومنه نجد :

$P_{x_s y_s} = P_{y_s z_s} = P_{x_s z_s} = 0$ (3) (3) (3)

من ذلك نستنتج أن المحاور ox_s, oy_s, oz_s محاور اساسية للعطالة. (3)
ويمكن للطالب أن يستخدم طريقة الحساب المباشر.

ج٣ : 15
الشرط اللازم والكافي حتى تكون المجموعة S المتحركة تحرك مجموعة متماسكة هو أن يكون مسقطا سرعتي أي نقطتين منها على المستقيم الواصل بينهما متساويان أي : (3)

$\forall A, B \in S$ مجموعة متماسكة $\Leftrightarrow \underset{AB}{pro} \vec{V}(A) = \underset{AB}{pro} \vec{V}(B)$

البرهان: لو كانت المجموعة S المتحركة متماسكة فإن:

(3) $\forall A, B \in S \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = c \; ; c = const \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB})^2 = c^2 \Leftrightarrow$

$2\,\overrightarrow{AB}\,\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$

لا يمكن أن يكون $\overrightarrow{AB} = 0$ يناقض الفرض المجموعة متماسكة
ولا يمكن أن يكون $\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = 0$ لأن S مجموعة متحركة $\Leftrightarrow$
بينما المقبول أن يكون $\overrightarrow{AB} \perp \frac{d\overrightarrow{AB}}{dt}$

(4) وحسب شال $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\frac{d\overrightarrow{AB}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OB}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} = \vec{V}(B) - \vec{V}(A)$

(3) $\overrightarrow{AB}(\vec{V}(B) - \vec{V}(A)) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}(B) = \overrightarrow{AB}\cdot\vec{V}(A) \Leftrightarrow$

حسب تعريف الجداء السلمي

(2) $\begin{cases} |\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{V}(B)|\cos\varphi = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{V}(A)|\cos\theta \\ \varphi = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{V}(B)}) \quad , \quad \theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \vec{V}(A)}) \end{cases} \Leftrightarrow$

حسب تعريف الجداء السلمي:

$|\vec{V}(B)|\cos\varphi = |\vec{V}(A)|\cos\theta \Leftrightarrow pro_{AB}\,\vec{V}(B) = pro_{AB}\,\vec{V}(A)$

و. هـ. م.

(6)

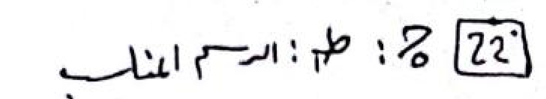
16 ع: ط1: الرسم المناسب وإثبات أن الوسطاء الكافية لتعيين موضع القضيب هي وسيط وحيد هو الزاوية φ (زاوية دورانه حول نقطة معينة منه).

ط2: (5) إيجاد منحني القاعدة (بأي طريقة) وهو منحني دائري مركز دائرته O ونصف قطرها L بمعادلة: $X^2 + Y^2 = L^2$ (حيث X و Y احداثيا المركز الآني I في OXY الثابتة)

(5) إيجاد منحني المتدحرج (بأي طريقة) وهو منحني دائري مركز دائرته $G(0, \frac{L}{2})$ ونصف قطرها $\frac{L}{2}$ ومعادلته $X_s^2 + (Y_s - \frac{L}{2})^2 = \frac{L^2}{4}$

حيث (X_s, Y_s) احداثيا I في الجملة المتماسكة مع القضيب وهي AX_sY_s.

—٣—



وإثبات أن الوسطاء المستقلة الماهية لتعيين وضع الجسم هي الزاويتين:

$\varphi = (\widehat{OX, OX_1})$ الترنح حول OZ

$\theta = (\widehat{OZ, OZ_1})$ التأرجح حول OX_1 المنطبق على OX_s.

(10)

ط:

إيجاد سطح المتدحرج ج:

$$p_s = \dot{\theta},\quad q_s = \dot{\varphi}\sin\theta,\quad r_s = \dot{\varphi}\cos\theta$$

(6)

$$\frac{X_s}{p_s} = \frac{Y_s}{q_s} = \frac{Z_s}{r_s} \Rightarrow \frac{X_s}{\dot{\theta}} = \frac{Y_s}{\dot{\varphi}\sin\theta} = \frac{Z_s}{\dot{\varphi}\cos\theta} \Rightarrow Y_s^2 + Z_s^2 = \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}}\right)^2 X_s^2$$

وهو سطح مخروطي محور تناظره OX_s

إيجاد سطح القاعدة:

(6)

$$p = \dot{\theta}\cos\varphi,\quad q = \dot{\theta}\sin\varphi,\quad r = \dot{\varphi}$$

$$\frac{X}{p} = \frac{Y}{q} = \frac{Z}{r} \Rightarrow \frac{X}{\dot{\theta}\cos\varphi} = \frac{Y}{\dot{\theta}\sin\varphi} = \frac{Z}{\dot{\varphi}} \Rightarrow X^2 + Y^2 = \left(\frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}\right)^2 Z^2$$

وهو سطح مخروطي محور تناظره OZ.

د. ه. م

جامعة البعث
كليـــة العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر الميكانيك ٢

السنة الثالثة رياضيات

اسم الطالب : محمد الحسين
العلامة : 100 (مائة درجة)
المدة : ساعة ونصف

الفصل الأول 2014 - 2015

(12) السؤال الأول : أجب عن أحد السؤالين التاليين:

1. عرف عزم عطالة مجموعة مادية بالنسبة إلى نقطة معينة، ثم اكتب العلاقة الموافقة لحالة جسم صلب بالنسبة لنفس النقطة.
- عرف نصف قطر العطالة – عرف محور التناظر الديناميكي.
2. اكتب نص ثلاث من خصائص عزوم عطالة جسم صلب منسوب إلى جملة مقارنة ثلاثية متعامدة.

(17) السؤال الثاني : أجب عن أحد السؤالين التاليين: 1. احسب السرعة المطلقة لنقطة M . 2. احسب التسارع المطلق لنقطة M .

(7) السؤال الثالث : إذا كان الجسم الصلب صفيحة دائرية متجانسة نصف قطرها واحدة الأطوال، فأوجد I_G ، حيث G مركز كتلها، ثم عزم عطالتها بالنسبة لقطرها، واحسب I_O حيث O نقطة من محيط الصفيحة.

(9) السؤال الرابع : إذا كان الجسم الصلب كرةً متجانسة ونصف قطرها واحدة الأطوال ومركزها G ، فاحسب I_G ، ثم استنتج عزم عطالتها بالنسبة لمستو مركزي في الكرة.

(20) السؤال الخامس : أجب عن أحد السؤالين التاليين:

1. **(حل هذه المسألة مستفيداً من نتائج س4 دون إجراء أي عملية تكاملية، وأي حل بطريقة أخرى يعتبر خاطئاً)** إذا كان الجسم الصلب مجسماً ناقصياً متجانساً منسوباً لجملة المقارنة $GXYZ$ ، حيث G مركز كتل الجسم، وأنصاف محاوره $a>b>c$ ، فاحسب كلاً من I_G ، I_{GXY} ، I_{GYZ} ، I_{GXZ} ، ثم أوجد كلاً من I_O ، I_{OXY} ، I_{OYZ} ، I_{OXZ} ، حيث $O(0,-b,0)$ في $GXYZ$ و $OX // GX$ و $OZ // GZ$.
2. **إذا كان الجسم الصلب المتحرك قرصاً دائرياً نصف قطره** r ، يتدحرج بدون انزلاق على المحيط الداخلي لسلك ثابت نصف قطره R ، حيث $R>r$ ، فالمطلوب: - ارسم الشكل المناسب وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القرص. – عين المركز الآني للدوران بما لا يزيد عن سطرين. – عين كلاً من المنحني المتدحرج والمنحني القاعدة، معللاً إجابتك بما لايزيد عن سطرين.

(35) السؤال السابع : إذا كان الجسم الصلب المتحرك مخروطاً دورانياً يتحرك حول رأسه الثابت بحيث يبقى محور تناظره دوماً في المستوي الأفقي، فالمطلوب:

1. ارسم الشكل المناسب وأوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع المخروط.
2. أوجد السطح المتدحرج واذكر صفاته.
3. أوجد السطح القاعدة واذكر صفاته.

——— تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح ——— مدرس المقرر: د.كامل محمد ———

سلم تصحيح فيزياء

فضاء ث ل

ج1: أجب أحد السؤالين:

1.- إذا كانت O نقطة معينة و $S=\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ مجموعة نقاط مادية كتلها $m_1, m_2, \dots, m_n$ فإن عزم عطالة المجموعة S بالنسبة للنقطة O نعرفه بأنه مجموع عزوم العطالة لكل نقاط المجموعة بالنسبة لـ O أي أن: $I_O = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2$ و $r_i = |OA_i|$ (4)

- إذا كان I عزم عطالة بالنسبة لـ: محور أو مستوٍ أو نقطة فإننا نقول عن العدد الموجب K إنه نصف قطر العطالة إذا تحققت العلاقة $I = MK^2$ (4)

- نقول عن محور ما مثل Oz إنه محور تناظر ديناميكي بجسم في جملة المقارنة النظامية OXYZ إذا كان $I_X = I_Y$. (4)

2. (3×4) اكتب نص ثلاث من خصائص عزوم العطالة لجسم منسوب إلى جملة مقارنة نظامية OXYZ: إن أي ثلاث من الخصائص التالية صحيحة:

$I_O = \frac{1}{2}(I_X + I_Y + I_Z)$ و $I_O = I_{OXY} + I_{OYZ} + I_{OZX}$.

$I_{OX} = I_{OXY} + I_{OXZ}$ or $I_{OY} = I_{OYZ} + I_{OXY}$, $I_{OZ} = I_{OZX} + I_{OZY}$) ,

$I_O = I_{OXY} + I_{OZ} = I_{OYZ} + I_{OX} = I_{OZX} + I_{OY}$

$I_O = I_{OXY} + I_{OZ}$ ... $I_{OY} + I_{OZ} \geq I_{OX}$, $I_{OX} + I_{OZ} \geq I_{OX}$

$I_{OX} + I_{OY} \geq I_{OZ}$, $I_{OZ} - I_{OX} \leq I_{OY}$

$I_{OX} - I_{OY} \leq I_{OZ}$, $I_{OY} - I_{OZ} \leq I_{OX}$

ج2: أجب عن سؤال واحد مما يلي: (17)

1. احسب السرعة المطلقة لنقطة M: الرسم المناسب في صفحة المجيب للجوابين

الفرض: $R: OXYZ$ جملة مقارنة عطالية قاعدتها $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ و $R_s: O_sX_sY_sZ_s$ جملة مقارنة متحركة (كأن تكون مرتبطة بجسم متحرك مثلاً) وقاعدتها $(O_s, \vec{I_s}, \vec{J_s}, \vec{K_s})$

M نقطة تتحرك في فضاء R_s وإحداثياتها في (X_s, Y_s, Z_s) وإحداثياتها في فضاء R هي (X, Y, Z)

O_s في R هي $(X(O_s), Y(O_s), Z(O_s))$ وفي مثل هذه الحالة

نتائج النظرية: $\vec{V_a} = \vec{V_e} + \vec{V_r}$ (1) (4) حيث $\vec{V_a}$ السرعة المطلقة لـ M

$\vec{V_e}$ السرعة الجرية لـ M في R_s و $\vec{V_r}$ السرعة النسبية لـ M في R_s

وحسب تعريف الحركة الجرية بشكل عام (2) (3) وهي سرعة نقطة من جسم في الحركة العامة (3)

$\vec{V_e} = \vec{V}(M/R) = \vec{V}(O_s) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_sM} = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R$ ، $M \in R_s$

ومن تعريف السرعة النسبية (3) (3)

$\vec{V_r} = \vec{V}(M/R_s) = \frac{d\vec{O_sM}}{dt}\Big|_{R_s} = \dot{X_s}\vec{I_s} + \dot{Y_s}\vec{J_s} + \dot{Z_s}\vec{K_s}$ ، $M \notin R_s$

نعوض في (1) نجد (2)

$\vec{V_a} = \vec{V}(O_s/R) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_sM} + \dot{X_s}\vec{I_s} + \dot{Y_s}\vec{J_s} + \dot{Z_s}\vec{K_s}$

و هـ . ط . د

السؤال الثاني

ج 2. حساب التسارع المطلق للنقطة M: $\vec{\Gamma}$

ننطلق من النظرية (1) $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$

ومنه نشتق طرفي (1) زمنيا في R ①

$$\vec{\Gamma}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt}\Big|_R = \frac{d\vec{V}_e}{dt}\Big|_R + \frac{d\vec{V}_r}{dt}\Big|_R$$ ② درجتان

$$\vec{\Gamma}_a = \frac{d}{dt}\left[\vec{V}(O_s/R) + \vec{\omega}\wedge\vec{O_sM} + \dot{x}_s\vec{I}_s + \dot{y}_s\vec{J}_s + \dot{z}_s\vec{K}_s\right]\Big|_R$$ ③ ثلاث

$$= \frac{d\vec{V}(O_s/R)}{dt}\Big|_R + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM})\Big|_R + \frac{d}{dt}(\dot{x}_s\vec{I}_s + \dot{y}_s\vec{J}_s + \dot{z}_s\vec{K}_s)\Big|_R \quad (2)$$

علما أنه من تعريف التسارع أن نكتب

$$\vec{\Gamma}_{O_s} = \frac{d\vec{V}(O_s/R)}{dt}\Big|_R \quad (3)$$

ونشتق الحد الثاني من (2) فنجد:

$\vec{\varepsilon}$ متجه تسارع الدوران

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM})\Big|_R = \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge\frac{d\vec{O_sM}}{dt}\Big|_R$$

$$= \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge\left[\frac{d\vec{O_sM}}{dt}\Big|_R + \frac{d\vec{O_sM}}{dt}\Big|_R\right]$$

$M \in R_s \qquad M \notin R_s$

③
$$= \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge[\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM} + \vec{V}_r]$$
$$= \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM}) + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r \quad (4)$$

ونجري الاشتقاق المطلق للحد الثالث من (2)

$$\frac{\vec{V}_r}{t}\Big|_R = \frac{d}{dt}(\dot{x}_s\vec{I}_s + \dot{y}_s\vec{J}_s + \dot{z}_s\vec{K}_s)\Big|_R = \frac{d\dot{x}_s}{dt}\vec{I}_s + \frac{d\dot{y}_s}{dt}\vec{J}_s + \frac{d\dot{z}_s}{dt}\vec{K}_s$$
$$+ \dot{x}\frac{d\vec{I}_s}{dt}\Big|_R + \dot{y}_s\frac{d\vec{J}_s}{dt}\Big|_R + \dot{z}_s\frac{d\vec{K}_s}{dt}\Big|_R$$
$$= \ddot{x}_s\vec{I}_s + \ddot{y}_s\vec{J}_s + \ddot{z}_s\vec{K}_s + \vec{\omega}\wedge[\dot{x}\vec{I}_s + \dot{y}_s\vec{J}_s + \dot{z}_s\vec{K}_s] \; ; \; \vec{\Gamma}_r = \ddot{x}_s\vec{I}_s + \ddot{y}_s\vec{J}_s + \ddot{z}_s\vec{K}_s$$

③ حيث
$$\frac{d\vec{I}_s}{dt}\Big|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{I}, \quad \frac{d\vec{J}_s}{dt}\Big|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{J}_s, \quad \frac{d\vec{K}_s}{dt}\Big|_R = \vec{\omega}\wedge\vec{K}_s$$

ونستفيد من تعريف السرعة النسبية والتسارع النسبي نجد أن

$$\frac{d}{dt}\vec{V}_r\Big|_R = \vec{\Gamma}_r + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r \quad (5)$$

بالتعويض (3) و (4) و(5) في (2) نجد

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}(O_s/R) + \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_sM} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{O_sM}) + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r + \vec{\Gamma}_r + \vec{\omega}\wedge\vec{V}_r \quad (6)$$

صحيح تعريف التسارع الجري (التسارع الناتج عن الجر) ...

$$\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}(O_s|R) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_sM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O_sM}) \quad (7)$$

نعوض 7 في (6) فنجد:

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_r + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

وهكذا نجد أنه يوجد بالإضافة إلى مجموع التسارعين النسبي والجري يوجد التسارع $2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$ وهو ليس نسبياً ولا جرياً فسماه كوريوليس

تسارعاً متمماً و رمزله ب $\vec{\Gamma}_C$ و بهذا الشكل نكتب

$$\vec{\Gamma}_a = \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_C$$

7 : ح

$$I_G = \rho \int_S (x^2+y^2)\, ds = \rho \int_S r^2\, dx\, dy$$

في الإحداثيات

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$ds = dx\,dy = |J|\, dr\, d\varphi$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r \Rightarrow dx\,dy = r\,dr\,d\varphi$$

$0 \le \theta \le 2\pi$; $0 \le r \le R = 1$

$R = 1$

$$I_G = \rho \int_0^1 r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\rho\pi}{4} = \frac{\rho\pi}{2} \quad (3)$$

$$I_G = 2 I_{Gx} \Rightarrow I_{Gx} = I_G/2 = \frac{\rho\pi}{4} \quad (2)$$

$I_O = md^2 + I_G$, $d = 1$

$$I_O = \rho\pi + \frac{\rho\pi}{2} = \frac{3}{2}\rho\pi \quad (2)$$

9 : ح

$dv = dx\,dy\,dz$, $x^2+y^2+z^2 = 1$

$$I_G = \rho \int_V r^2 dv = \rho \int_V r^2\, dx\, dy\, dz \quad (1)$$

بالانتقال إلى الكروية

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$ (3)

$0 \le \varphi \le 2\pi$

$0 \le \theta \le \pi$

$0 \le r \le 1$

$dv = |J|\, dr\, d\theta\, d\varphi$ (2)

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} = r^2\sin\theta \quad (2)$$

$$I_G = \rho \int_0^1 r^4 \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\rho 4\pi}{5} = 3 I_{GXZ}$$

وبالتالي

$$I_{GXY} = I_{GYZ} = I_{GZX} = \frac{\rho 4\pi}{15} \quad (1)$$

ج: أجب عن سؤال واحد فقط:

1. إن معادلة الجسم هي

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$

وحجم الجسم العنصري للجسم (الثلاثي): $dV = dXdYdz$

نجري التحويل التالي

$$\frac{X}{a}=x \Rightarrow X=ax \;,\; \frac{Y}{b}=y \Rightarrow Y=by \;,\; \frac{Z}{c}=z \Rightarrow Z=cz \Rightarrow dV$$

فنحصل على المعادلة

(3) $x^2+y^2+z^2=1$ معادلة سطح كرة

ومنه

$dV = a\cdot b\cdot c\, dx\cdot dy\cdot dz = abc\, dV_1$ ، وحجم عنصري dV_1 من حجم الكرة

$$I_{GXZ}=\rho\int_V Y^2 dV = a\cdot b^3 c \int_{V_1} y^2 dV_1 = a\cdot b^3\cdot c\cdot I_{Gxz}$$

ومن المسألة الرابعة $I_{Gxz}=\frac{\rho 4}{15}\pi$

(3) $I_{GXZ}=\left(\rho\frac{4}{3}a\cdot bc\pi\right)\frac{b^2}{5}=\frac{m}{5}b^2$

(2) $I_{GYZ}=\rho\int_V X^2 dV = a^3bc\rho\int_{V_1} x^2\,dxdydz=\left(\rho\frac{4}{3}abc\pi\right)\frac{a^2}{5}=\frac{m a^2}{5}$

وبنفس الطريقة

(2) $I_{GXY}=\frac{mc^2}{5}$

(2) $I_G = I_{GYZ}+I_{GZX}+I_{GXY}=\frac{m}{5}(a^2+b^2+c^2)$

(2) $I_O = md^2+I_G = mb^2+\frac{m}{5}(a^2+b^2+c^2)=\frac{m}{5}(a^2+6b^2+c^2)$

(2) $I_{OXZ}=md^2+I_{GXZ}=mb^2+\frac{mb^2}{5}=\frac{6mb^2}{5}$

(2) $I_{OXY}=md^2+I_{GXY}=\frac{mc^2}{5}$; $d=0$

(2) $I_{OYZ}=md^2+I_{GYZ}=\frac{ma^2}{5}$; $d=0$

2: القرص يتحرك حركة مستوية فيتغير بزاوية دورانه حول مركز كتلته ولتكن $\theta = (\widehat{GX, GX_s})$ وإحداثيته $X(G)$، $Y(G)$ ولكن بسبب القيد (الاستناد على السلك الداخلي)

(5)

$X(G)=(R-r)\cos\varphi$

$Y(G)=(R-r)\sin\varphi$

وهكذا فإن الوسطاء أصبحا اثنين θ والزاوية القطبية التي تعين G وهو φ

لكن من طبيعة القيد يؤدي القرص لتدحرج بدون انزلاق وبالتالي: $\vec V(I)=\vec V(I)$، $I\in S$، $I\in C(O,R)$

ولكن $\vec V(I)=0$، $I\in C(O,R)$ لذلك $V(I)=(R-r)\dot\varphi\vec e_\varphi+\dot\theta r\vec e_\theta$، $I\in C(G,r)$

إذن $(R-r)\dot\varphi = r\dot\theta$ وبالتالي القرص وسيط مستقل وحيد وليكن θ

نتيجة $\frac{c}{R_0}$ ؛

- إن نقطة التماس آني كل لحظة معدومة السرعة آنيا وبالتالي فهي مركز الدوران

- ان المتدحرج هو المحل الهندسي للمركز الآني للدوران I في R_s وهنا فواضح ان هذا المتدحرج هو محيط القرص لأن I لا تفارقه. (5)

- ان منحني القاعدة هو المحل الهندسي للمركز الآني للدوران I في R وهنا فواضح ان هذا المنحني القاعدة هو منحني السلك لأن I لا تفارقه (5)

و. هـ. م،

ط2: الحركة لجسم صلب فيه نقطة ثابتة هي دورانية وتتعين بثلاث زوايا هي زوايا أولر: φ الترنح، θ التأرجح، ψ الدوران الذاتي لكن التأرجح معلوم $\theta = \frac{\pi}{2}$ بالفرض، اذن بقي وسيطين هما φ الترنح و ψ الدوران الذاتي وهما مستقلان عن بعضهما. (11)

35

z_s, z, $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, y, Z_s, φ, ψ, X_s, X_1, x

ط: لايجاد السطح المتدحرج نجد:

$p_s = \dot{\varphi}\sin\psi$, $q_s = \dot{\varphi}\cos\psi$, $r_s = \dot{\psi}$ But $\frac{x_s}{p_s} = \frac{y_s}{q_s} = \frac{z_s}{r_s} \Rightarrow \frac{x_s}{\dot{\varphi}\sin\psi} = \frac{y_s}{\dot{\varphi}\cos\psi} = \frac{z_s}{\dot{\psi}}$

معادلات المحور الآني للدوران وبحذف الوسيط نجد ان المتدحرج:

$x_s^2 + y_s^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\psi}^2} z^2$ (12)

سطح مخروطي محوره هو oz_s.

ط3

$p = \dot{\psi}\sin\varphi$, $q_s = -\dot{\psi}\cos\varphi$, $r = \dot{\varphi}$

$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{x}{\dot{\psi}\sin\varphi} = \frac{y}{-\dot{\psi}\cos\varphi} = \frac{z}{\dot{\varphi}}$

معادلات المحور الآني للدوران وبحذف الوسيط نجد:

$x^2 + y^2 = \frac{\dot{\psi}^2}{\dot{\varphi}^2} z^2$ (12)

وهو سطح مخروطي محور تناظره oz.

و. هـ. م،

١٣/

جامعة البعث — امتحان مقرر الميكانيك ٢

كليـة العلـوم

قسم الرياضيات

السنة الثالثة رياضيات

الدورة الصيفية 2014 - 2013

اسم الطالب :

العلامة : 100 (مائة درجة)

المدة : ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية:

السؤال الأول : (30):

اكتب العلاقة الاتجاهية المناسبة لحساب كلٍ من السرعة والتسارع لنقطة M من الجسم S في كلٍ من حالات حركته التالية:

1) عندما يدور الجسم S في الفضاء الثلاثي الأبعاد حركة دورانية حول محور ثابت منه. 2) عندما يتحرك الجسم S حركة مستوية، مستويها OXY. 3) عندما يتحرك الجسم S حركة دورانية حول نقطة ثابتة منه O .

السؤال الثاني (14) :

إذا كان القضيب OB متجانساً وكتلته تساوي M وطوله $2L$ ومحمولاً على المحور OX ، فالمطلوب مايلي:

1) ارسم الشكل المناسب، 2) احسب I_O ، ثم I_G (حيث G مركز الكتل)، 3) احسب P_{XY} و P_{YZ} و P_{ZX}.

السؤال الثالث (19):

إذا كانت الصفيحة المتجانسة $OABC$ مربعة الشكل وطول ضلعها L وكتلتها m و OA محمولاً على OX و OC محمولاً على OY ، فالمطلوب:

1) ارسم الشكل المناسب في $OXYZ$ ، 2) احسب I_{OX} و P_{XY}.

السؤال الرابع (15):

إذا كان الجسم الصلب S يتحرك في الفضاء الثابت: ($R:OXYZ$)، وكانت O_s نقطة من S وسرعتها:

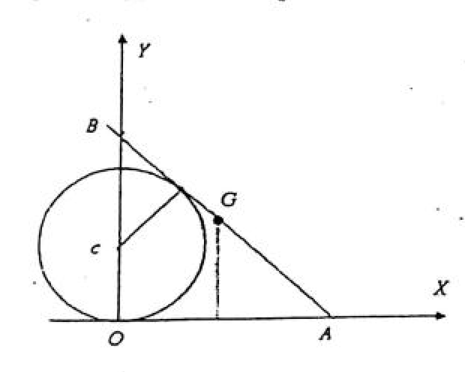
$\overline{V}(O_s/R) = PL(\bar{I}_s + 2\bar{J}_s + 3\bar{K}_s)$ و M نقطة أخرى من S ، حيث: $\overline{O_sM} = L(\bar{I}_s + \bar{J}_s)$ ، ومتجه دوران S حول O_s هو $\bar{\omega} = P(\bar{I}_s + \frac{\bar{J}_s}{2} + \frac{\bar{K}_s}{3})$ ، فالمطلوب احسب $\overline{V}(M/R)$.

السؤال الخامس (22):

إذا كان القضيب الصلب المتجانس AB الذي طوله $2L$ ، يتحرك في المستوي الثابت OXY ، حيث يستند القضيب على محيط دائرة ثابتة (c,r) ، ويمسها المحور الأفقي OX في O ، و ينزلق طرفه A على OX كما في الشكل المجاور، فالمطلوب:

1) عين الوسطاء المستقلة الكافية، موضحاً ذلك على الشكل.

2) أوجد سرعة G، مركز كتل القضيب بدلالة الوسطاء المستقلة ومشتقها الزمني. ثم أوجد تسارع G.



تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح — مدرس المقرر: د.كامل محمد

جامعة البعث — سلم التصحيح
كلية العلوم — مقرر الميكانيك ٢
قسم الرياضيات — الدورة الصيفية ٢٠١٣-٢٠١٤

الطلب الأول : [30]

ج١ : ط١ : O نقطة من محور الدوران و φ زاوية الدوران و $\vec{\dot\varphi}$ = شعاع متجه الدوران ، $M \in S_\phi$ ⑤

$$\vec{V}(M) = \vec{\dot\varphi} \wedge \vec{OM}$$

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{OM} + \vec{\dot\varphi} \wedge (\vec{\dot\varphi} \wedge \vec{OM})$$ ⑤

او

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\ddot\varphi} \wedge \vec{OM} - \dot\varphi^2 \vec{M_1M}$$

حيث $\vec{\ddot\varphi} = \vec{\varepsilon}$ متجه التسارع الدوراني للجسم و M_1 مسقط قائم لـ M على محور الدوران

الطلب الثاني ط٢ : عندما يتحرك جسم صلب حركة مستوية في المستوي oXY

$$\vec{V}(M) = \vec{V}(O_s) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_sM}$$ ⑤

O_s نقطة من S و M نقطة اختيارية من S و $\vec{\omega}$ متجه دوران الجسم حول محور مار من O_s ومتماسك مع الجسم ويعامد مستوي حركة الجسم

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O_s) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_sM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O_sM})$$ ⑤

او إذا كان الجسم صفيحة مستوية :

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O_s) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_sM} - \omega^2 \vec{O_sM}$$

علماً أن $\vec{\varepsilon}$ متجه التسارع الدوراني للجسم حول محور مار من O و يعامد مستوي حركة الجسم

ط٣ : عندما يتحرك الجسم الصلب حول نقطة ثابتة منه :

$$\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$ ⑤

O النقطة الثابتة من الجسم و M نقطة اختيارية و $\vec{\omega}$ متجه الدوران الآني حول O منه

$$\vec{\Gamma}(M) = \vec{\varepsilon} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$$ ⑤

حيث $\vec{\varepsilon}$ متجه الآني للتسارع الدوراني حول O.

ج٢ : ط١ : [14]

(شكل: قضيب OB على المحور x، مع x و dx، المحوران x و y) ⑫

ط٢ :

$$I_0 = \rho \int_0^{2L} x^2 dx = \rho \left(\frac{x^3}{3}\right)_0^{2L} = \frac{\rho 8L^3}{3} = \frac{4(\rho 2L)L^2}{3}$$

$$= \frac{4}{3} M L^2 \quad ; \quad M = \rho(2L)$$ ⑥

ثم حساب I_G :

ومنه

$$I_0 = I_G + M(\vec{OG})^2 = I_G + ML^2$$

$$I_G = I_0 - ML^2 = \frac{4ML^2}{3} - ML^2 = \frac{M}{3}L^2$$

تتمة السؤال ٢ :
ط٣ :

$P_{xy} = \int_s x\,y\,dm = 0$; $y = 0$ و $dy = 0$

(6) $P_{yz} = \int_s yz\,dm = 0$; $y = z = 0$

$P_{zx} = \int_s zx\,dm = 0$, $z = 0$

ح ٣ : ط١ :

(3)

[19]

ط٢ :

$I_x = \int_s y^2\,dm$; $dm = \rho\,ds = \rho\,dx\,dy$

$= \rho \int_0^L y^2\,dy \int_0^L dx = \rho \frac{L^3}{3} \cdot L$

(8) $= \frac{\rho L^2}{3} L^2 = \frac{m}{3} L^2$; $m = \rho S = \rho L^2$

$P_{xy} = \int_s xy\,dm = \rho \int_s xy\,ds = \rho \int_0^L x\,dx \int_0^L y\,dy$

(8) $= \rho \frac{L^2}{2} \cdot \frac{L^2}{2} = \frac{\rho L^2}{4} \cdot L^2 = \frac{m L^2}{4}$

ح٤ : المفروضات : حركة الجسم عامة

[15]

$\vec{V}(O_s/R) = PL(\vec{I}_s + 2\vec{J}_s + 3\vec{K}_s)$

$O_sM = L(\vec{I}_s + \vec{J}_s)$ علماً أن O_s نقطة معينة من الجسم و

$\vec{\omega} = P(\vec{I}_s + \frac{\vec{J}_s}{2} + \frac{\vec{K}_s}{3})$ متجه الدوران . و M نقطة أخرى من S

المطلوب حساب $\vec{V}(M/R)$.

الجواب : الحركة عامة وسرعة أي نقطة من الجسم تعطى بالعلاقة :

(5) $\vec{V}(M/R) = \vec{V}(O_s) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_sM}$

نعوض المفروضات فنجد :

$\vec{V}(M/R) = PL(\vec{I}_s + 2\vec{J}_s + 3\vec{K}_s) + \begin{vmatrix} \vec{I}_s & \vec{J}_s & \vec{K}_s \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} LP$

(5)

(5) $= LP(\vec{I}_s + 2\vec{J}_s + 3\vec{K}_s - \frac{\vec{I}_s}{3} + \frac{\vec{J}_s}{3} + \frac{\vec{K}_s}{2}) = LP(\frac{2}{3}\vec{I}_s + \frac{7}{3}\vec{J}_s + \frac{7}{2}\vec{K}_s)$

د . ص . ع . ح

22

ط1: حركة القضيب مستوية بالفرض وبالتالي بشكل عام يتعين موضعه بثلاثة وسطاء مستقلة هي احداثيات نقطة معينة في مستوي الحركة الثابت وزاوية دورانه حول محور يمر من تلك النقطة ويعامد مستوي الحركة ولذلك لو أخذنا A هي النقطة المقصودة فإنها تتعين ب

$Y(A)=0$ و $X(A)$ و $(\widehat{AX, AX_s})=\theta$ ولكن

$$X(A)=\overline{OA}=r/tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)=r\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

أي أن قيد الإستناد على AX وعلى محيط أخفض الوسطاء المستقلة إلى واحد وهو إما X(A) أو θ سنأخذ θ.

ط2: نعلم من السؤال الأول للطلب الثاني أن:

حركة مستوية

$$\vec{V}(G/R)=\vec{V}(A)+\vec{\dot\theta}\wedge\vec{AG}\;;\;\vec{\dot\theta}=\dot\theta\vec{K_s}=\dot\theta\vec{K}$$

$$\vec{V}(G/R)=\dot{X}(A)\vec{i}+\dot\theta\vec{K}\wedge(L\sin\theta\,\vec{i}+L\cos\theta\,\vec{j})$$

نحسب $\dot{X}(A)$ نجد:

$$\dot{X}(A)=\frac{r\dot\theta}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{r\dot\theta}{1-\sin\theta}$$

$$1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

نعوض فنجد:

(8)

$$\vec{V}(G/R)=\left(\frac{r\dot\theta}{1-\sin\theta}-L\dot\theta\cos\theta\right)\vec{i}+L\dot\theta\sin\theta\,\vec{j}\;*$$

ثم نشتق * أو من علاقة تحويل السرعة فنحصل على

$$\vec\Gamma(G/R)=\left[\ddot\theta\left(\frac{r}{1-\sin\theta}-L\cos\theta\right)+\dot\theta^2\left(\frac{r\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2}+L\sin\theta\right)\right]\vec{i}$$

(4) $-L(\ddot\theta\sin\theta+\dot\theta^2\cos\theta)\vec{j}$

أو:

$$\vec\Gamma(G/R)=\left[r\frac{\ddot\theta(1-\sin\theta)+\dot\theta^2\cos\theta}{(1-\sin\theta)^2}-L(\ddot\theta\cos\theta-\dot\theta^2\sin\theta)\right]\vec{i}$$
$$-L(\ddot\theta\sin\theta+\dot\theta^2\cos\theta)\vec{j}$$

جامعة البعث
كليـــة العلوم
قســم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك 2
سنة ثالثة رياضيات
الفصل الأول 2010 – 2011

اسم الطالب :
العلامة : 100 (مائة) درجة
المدة : ساعتان

السؤال الأول : (33 درجة) : اكتب أرقام البنود الصحيحة فقط على ورقة الإمتحان مما يلي: (توزع الدرجات على عدد البنود الصحيحة)

- **هندسة الكتل:**

I - إذا كان الجسم الصلب S منسوبا لجملة مقارنة نظامية $OXYZ$ ، فبشكل عام يكون: (في حالته العامة)

1) $I_O = I_X + I_Y$ ، 2) $I_O = I_Y + I_{ZY}$ ، 3) $I_O = I_Y + I_{XZ}$ ، 4) $I_X = I_{XY} + I_{XZ}$ ،
5) $I_Y = I_{XY} + I_{XZ}$ ، 6) $I_X \le I_Y + I_Z$ ، 7) $I_X \ge I_Y - I_Z$ ، 8) $I_X > I_{XY} + I_{XZ}$ ،
9) $I_Y < I_{XY} + I_{YZ}$ ، 10) $I_X \ge I_X - I_Z$ 11) $I_O = I_X + I_Y + I_Z$ ، 12) $I_O = \frac{1}{2}(I_{XY} + I_{YZ} + I_{ZX})$
13) $I_O = \frac{1}{2}(I_X + I_Y + I_Z)$ ، 14) $I_O = I_{XY} + I_{YZ} + I_{ZX}$.

II - إذا كان الجسم الصلب صفيحة مستوية واقعة في المستوي OXY ، فإن:

15) $I_X = I_{YZ}$ ، 16) $I_X = I_O$ ، 17) $I_{XY} = 0$ ، 18) $I_{XY} < 0$ ، 19) $I_Y = I_{YZ}$ ، 20) $I_z = I_O$
21) $I_O > I_X + I_Z$ ، 22) $I_O = I_X + I_Y$ ، 23) $I_Z < I_X + I_Y$ ، 24) $I_X < I_Z + I_Y$ ،
25) $I_Y > I_X - I_Z$ ، 26) $I_Z = I_X - I_Y$ ، 27) $I_Y - I_Z > 0$ ، 28) $I_Y + I_Z < 0$ ، 29) $I_Z - I_X > 0$

- **الحركة :**

III – الحركة العامة لجسم صلب: إذا كان الجسم الصلب S يتحرك طليقا في الفضاء $\Re^3$ فيتعيّن موضعه بمعرفة:

30) ثلاثة وسطاء مستقلة ، 31) أربعة وسطاء مستقلة 32) موضع ثلاث نقاط منه ليست على استقامة واحدة ، 33) موضع ثلاث نقاط منه على مستقيم واحد
34) ستة وسطاء مستقلة هي: ثلاثة إحداثيات لنقطة معينة منه وثلاث زوايا هي: φ توافق دوران الترنح حول الشاقول ، θ توافق دوران التأرجح حول خط العقد ، ψ توافق الدوران الذاتي حول محور من الجسم الصلب (أو متماسك معه).

IV – الحركة المستوية لجسم صلب : إذا كان الجسم الصلب S يتحرك حركة مستوية في $\Re^2$ ، عندئذٍ يتعين :

35) موضع S بمعرفة أربعة وسطاء مستقلة هي: ثلاثة إحداثيات لنقطة معينة منه وزاوية دورانه حول هذه النقطة في مستوي الحركة ،
36) موضع S بمعرفة ثلاثة وسطاء مستقلة هي: إحداثيان لنقطة معينة منه وزاوية دورانه حول هذه النقطة في مستوي الحركة ،
37) حقل السرع بالعلاقة : $\vec{V}(M) = \vec{V}(O_S) + \overline{O_S M} \wedge \vec{\dot{\varphi}} \; ; \forall M \in S$ ،
38) حقل التسارعات بالعلاقة : $\vec{\Gamma}(M) = \vec{\Gamma}(O_S) + \vec{\ddot{\varphi}} \wedge \overline{O_S M} - \dot{\varphi}^2 \, \overline{O_S M} \; ; \forall M \in S$ ،

V- الحركة الدورانية لجسم صلب S حول محور ساكن منه: إذا كان الجسم S يدور حول محور ساكن منه، عندئذٍ يتعين:

40) موضع S بثلاثة وسطاء مستقلة ، 41) موضع S بوسيطين مستقلين ، 42) موضع S بوسيط مستقل واحد هو زاوية الدوران حول هذا المحور ، 43) حقل السرع بالعلاقة: $\vec{V}(M) = \vec{V}(O_S) + \vec{\dot{\varphi}} \wedge \overline{O_S M} \; ; \forall M \in S \; , \; \vec{V}(O_S) \neq 0$ ،
44) حقل السرع بالعلاقة : $\vec{V}(M) = \overline{O_S M} \wedge \vec{\dot{\varphi}} \; ; \forall M \in S$ 45) حقل السرع بالعلاقة $\vec{V}(M) = \vec{\dot{\varphi}} \wedge \overline{OM} \; ; \forall M \in S$
حيث φ زاوية الدوران.

VI – الحركة الدورانية حول نقطة من الجسم: إذا كان الجسم الصلب S يتحرك حول نقطة ساكنة منه عندئذٍ يصح مايلي:

46) $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{\omega}$ على نفس الحامل بشكل عام ، 47) $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{\omega}$ على حاملين متقاطعين ، 48) $\vec{\varepsilon}$ و $\vec{\omega}$ متعامدان إذا كان : $|\vec{\omega}| = const$.

السؤال الثاني : (23 درجة) : يتحرك القضيب AB في المستوي الساكن OXY ، بحيث يستند هذا القضيب على محيط دائرة ساكنة $\Gamma(G,r)$ ، يمسها OX في O ، بينما طرفه A ينزلق على المحور OX ، والمطلوب:

1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القضيب مع رسم الشكل المناسب، مبيناً عليه هذه الوسطاء المستقلة.
2) أوجد المركز الآني للدوران ثم أوجد كلاً من منحني القاعدة ومنحني المتدحرج.

السؤال الثالث : (20 درجة) : جسم صلب بشكل مخروط دوراني متجانس كتلته M ونصف قطر قاعدته R وارتفاعه h ، والمطلوب:

1) ارسم الشكل المناسب في جملة نظامية $OXYZ$ ، حيث OZ ينطبق على حامل الارتفاع و O رأس المخروط.
2) أوجد سطح مجسم العطالة لهذا المخروط ، 2) أوجد مركز كتل هذا المخروط.

السؤال الرابع : (24 درجة) : إذا كان الجسم الصلب مخروطاً دورانياً ، يتحرك في جملة المقارنة النظامية الساكنة $OXYZ$، بحيث يكون رأس المخروط ساكناً في O وأحد أقطار قاعدة المخروط يبقى دائماً موازياً للمستوي الأفقي OXY ، فالمطلوب مايلي:

1) إيجاد عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة المخروط ، وتسميتها، ورسم الشكل المناسب الذي يبينها.
2) أوجد كلاً من سطح المتدحرج وسطح القاعدة ، علماً أن كلاً من الوسطاء المستقلة يتناسب طرداً مع الزمن .

تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح حمص 27 / 01 / 2011 م. مدرس المادة ، د.كامل محمد

جامعة البعث	امتحان مقرر ميكانيك2	الاسم :

كلية العلوم	العام الدراسي 2010 –2011	الرقم :

السنة الثالثة– رياضيات –فصل ثالث

السؤال الأول [26]: حل المسألة التالية :

صفيحة بشكل مثلث متساوي الساقين OAB قاعدته AB ، تتحرك في الفضاء $\mathbf{R}^3$ ، بحيث يبقى رأسها O ثابتاً . إذا كان $\bar{V}(A)$, $\bar{V}(B)$ متجهي سرعتي A , B فبرهن أن :

$$\left|\Pr_{OB}ov\ \bar{V}(A)\right| = \left|\Pr_{OA}ov\ \bar{V}(B)\right|$$

السؤال الثاني [2×37]: حل اثنتين مما يلي :

1) إن القضيب AB يتحرك في المستوي المنسوب للجملة النظامية الثابتة OXY بحيث ينزلق A على OX و B على OY و أن $|AB| = 2L$. المطلوب :

أ) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القضيب مع الرسم المناسب.

ب) عين مسار النقطة P الواقعة على AB في كلٍ من الحالات التالية:

– إذا كانت النقطة P منطبقة على A ، – إذا كانت النقطة P منطبقة على B ، – إذا كان $|AP| = |BP|$ ، – إذا كان $0 \neq |AP| \neq |BP|$.

جـ) عين المركز الآني لدوران القضيب و منحنيي المتدحرج و القاعدة .

2) مخروط دوراني يتحرك حول رأسه الثابت O بحيث يبقى قطر معين من أقطار قاعدته موازياً للمستوى الأفقي . المطلوب:

أ) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع المخروط مع الرسم المناسب.

ب) أوجد مركبات متجه دوران المخروط بدلالة وسطاء الحركة في الفضائين الثابت و المتماسك.

جـ) أوجد سطح مخروط المتدحرج و سطح مخروط القاعدة علماً أن نسبة مشتقي أي وسيطين تساوي ثابت.

3) سطح مخروطي صلب متجانس منسوب إلى جملة مقارنة نظامية متماسكة معه فيها OZ محور تناظره ، O رأس هذا السطح و كتلته M و ارتفاعه H و نصف قطر قاعدته R . المطلوب:

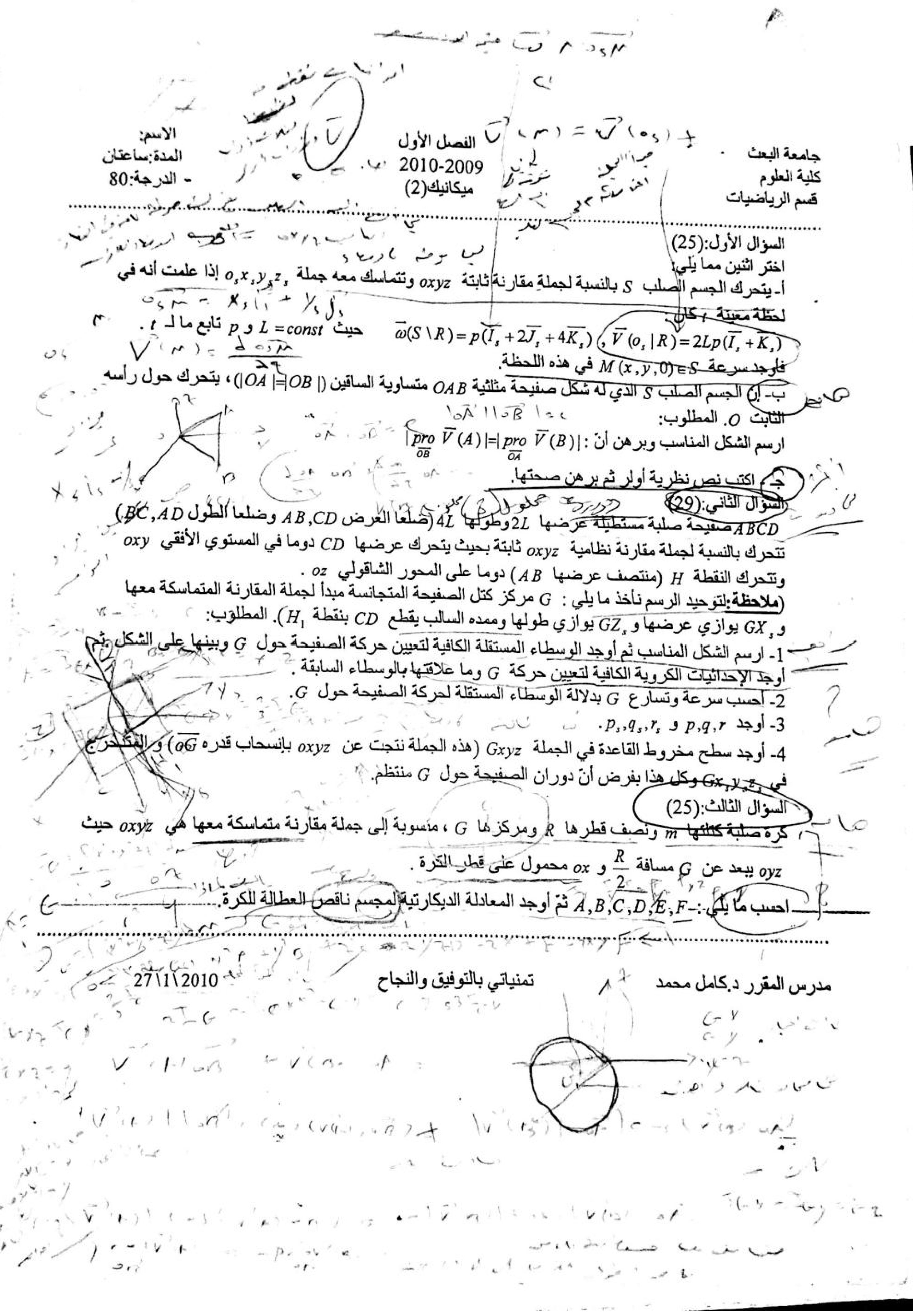
أ) عين مركز كتل هذا الجسم.

ب) أوجد : $I_O, I_{OX}, I_{OY}, I_{OZ}, I_{OXY}$.

(٤٧)

انتهت الأسئلة

حمص 2011/8/22	د. كامل المحمد



جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الأول
2010-2009
ميكانيك(2)

الاسم:
المدة:ساعتان
- الدرجة:80

السؤال الأول:(25)

اختر اثنين مما يلي:

أ- يتحرك الجسم الصلب S بالنسبة لجملة مقارنة ثابتة $oxyz$ وتتماسك معه جملة $o_sx_sy_sz_s$ إذا علمت أنه في لحظة معينة t كان:

$\overline{\omega}(S\setminus R)=p(\overline{I_s}+2\overline{J_s}+4\overline{K_s})$, $\overline{V}(o_s|R)=2Lp(\overline{I_s}+\overline{K_s})$ حيث $L=const$ و p تابع ما لـ t .

فأوجد سرعة $M(x,y,0)\in S$ في هذه اللحظة.

ب- إن الجسم الصلب S الذي له شكل صفيحة مثلثية OAB متساوية الساقين ($|OA|=|OB|$)، يتحرك حول رأسه الثابت O. المطلوب:

ارسم الشكل المناسب وبرهن أنّ: $|\underset{\overline{OB}}{pro}\ \overline{V}(A)|=|\underset{\overline{OA}}{pro}\ \overline{V}(B)|$

جـ- اكتب نص نظرية أولر ثم برهن صحتها.

السؤال الثاني:(29)

$ABCD$ صفيحة صلبة مستطيلة عرضها $2L$ وطولها $4L$ (ضلعا العرض AB,CD وضلعا الطول BC,AD) تتحرك بالنسبة لجملة مقارنة نظامية $oxyz$ ثابتة بحيث يتحرك عرضها CD دوما في المستوي الأفقي oxy وتتحرك النقطة H (منتصف عرضها AB) دوما على المحور الشاقولي oz .

(ملاحظة:لتوحيد الرسم نأخذ ما يلي: G مركز كتل الصفيحة المتجانسة مبدأ لجملة المقارنة المتماسكة معها و GX_s يوازي عرضها و GZ_s يوازي طولها وممده السالب يقطع CD بنقطة H_1). المطلوب:

1- ارسم الشكل المناسب ثم أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الصفيحة حول G وبينها على الشكل ثم أوجد الإحداثيات الكروية الكافية لتعيين حركة G وما علاقتها بالوسطاء السابقة .

2- أحسب سرعة وتسارع G بدلالة الوسطاء المستقلة لحركة الصفيحة حول G.

3- أوجد p,q,r و p_s,q_s,r_s.

4- أوجد سطح مخروط القاعدة في الجملة $Gxyz$ (هذه الجملة نتجت عن $oxyz$ بإنسحاب قدره $\overline{oG}$) والمتحرك في $Gx_sy_sz_s$ وكل هذا بفرض أنّ دوران الصفيحة حول G منتظم.

السؤال الثالث:(25)

كرة صلبة كتلتها m ونصف قطرها R ومركزها G ، منسوبة إلى جملة مقارنة متماسكة معها هي $oxyz$ حيث oyz يبعد عن G مسافة $\frac{R}{2}$ و ox محمول على قطر الكرة .

احسب ما يلي:- A,B,C,D,E,F ثمّ أوجد المعادلة الديكارتية لمجسم ناقص العطالة للكرة.

مدرس المقرر د.كامل محمد

تمنياتي بالتوفيق والنجاح

27\1\2010

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر ميكانيك 2
السنة الثالثة رياضيات
الفصل الثاني من العام الدراسي 2009 / 2010

اسم الطالب :
العلامة : ٨٠ (ثمانون) درجة
المدة : ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول : (24 درجة):

جسم صلب له شكل مخروط دوراني متجانس ارتفاعه h، ونصف قطر قاعدته $r=\frac{h}{3}$ ، وكتلته m . إذا نسبنا المخروط إلى جملة مقارنة نظامية $Ox_sy_sz_s$ متماسكة معه ومبدؤها يقع في رأسه ، و Oz_s يمر من رأسه ومركز قاعدته ، فالمطلوب إيجاد ما يلي بأقصر الطرق:

أولاً : إحداثيات مركز كتل المخروط.
ثانياً : عزوم عطالته I_{x_s} و I_{y_s} و I_{z_s}.
ثالثاً : جداءات عطالته $P_{x_sy_s}$ و $P_{y_sz_s}$ و $P_{z_sx_s}$.

السؤال الثاني : (20 درجة) :

سلك دائري مركزه O_1 ونصف قطره R يدور في المستوي الشاقولي حول نقطة ثابتة O من محيطه ويتحرك على محيطه الداخلي قرصٌ دائريٌ نصف قطره $\frac{R}{3}$ ومركزه O_2 ؛ المطلوب :

أولاً : أوجد شرط التدحرج دون انزلاق للقرص على المحيط الداخلي للسلك.
ثانياً : ما هو عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة هذا القرص بالنسبة لجملة مقارنة ثابتة مبدؤها O وفيها Ox أفقي يتجه نحو اليمين و Oy شاقولي يتجه نحو أعلى الورقة.

السؤال الثالث : (24 درجة)

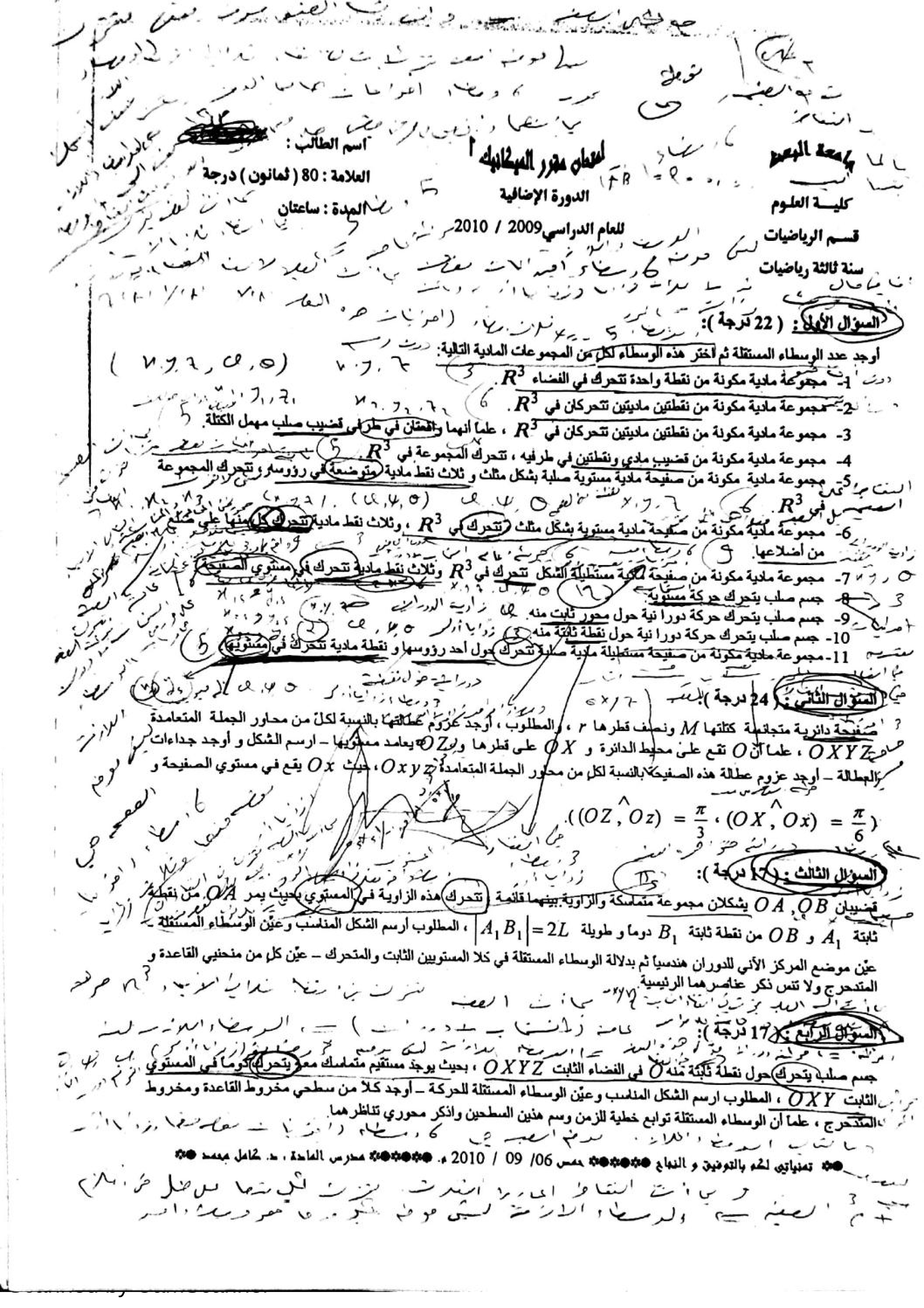
جسم صلب بشكل مخروط نصف زاويته الرأسية يساوي $\frac{\pi}{6}$:

أولاً : إذا كان هذا الجسم يتحرك حول رأسه الثابت O بحيث يمر في كل لحظة أحد مولداته من الشاقول ، فأجب على مايلي:
ارسم الشكل المناسب وحدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين الحركة ـــ أوجد مركبات متجه الدوران على كلٍ من محاور الجملة الثابتة و المتحركة مع الجسم .
ثانياً : إذا كان المخروط يتحرك حول رأسه الثابت O وتتم حركته بحيث يوجد دوماً مولدٌ له في المستوي الأفقي الثابت:
ارسم الشكل المناسب وحدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين الحركة ـــ أوجد مركبات متجه الدوران و شرط تدحرج المخروط على المستوي الأفقي الثابت بدون انزلاق وعيّن المحور الآني للدوران.

السؤال الرابع : (12 درجة)

أجب بكلمة صح أو خطأ :
أ) من خصائص عزوم العطالة : $I_x < I_y + I_z$
ب) يتعيَّن موضع الجسم الصلب الطليق في الفضاء - بشكل عام -- بتسعة وسطاء. صح
ج) يتعيَّن موضع الجسم الصلب الطليق في الفضاء - بشكل عام -- بستة وسطاء مستقلة.
د) إذا كانت $Oxyz$ جملة مقارنة نظامية وثابتة ، و $Ox_1y_1z_1$ جملة مقارنة طليقة تتحرك في فضاء الجملة الثابتة و M نقطة طليقة تتحرك في فضاء الجملة المتحركة فإن موضع النقطة M يتعين في فضاء الجملة الثابتة بتسعة وسطاء مستقلة.

حمص 10/ 06 / 2010 م. ***** تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح ***** مدرس المادة : د. كامل محمد ***



جامعة البعث
كليـــة العلوم
قسم الرياضيات
سنة ثالثة رياضيات

امتحان مقرر الميكانيك 1
الدورة الإضافية
للعام الدراسي 2009 / 2010

اسم الطالب :
العلامة : 80 (ثمانون) درجة
المدة : ساعتان

السؤال الأول : (22 درجة):

أوجد عدد الوسطاء المستقلة ثم اختر هذه الوسطاء لكل من المجموعات المادية التالية:

1- مجموعة مادية مكونة من نقطة واحدة تتحرك في الفضاء R^3 .
2- مجموعة مادية مكونة من نقطتين ماديتين تتحركان في R^3 .
3- مجموعة مادية مكونة من نقطتين ماديتين تتحركان في R^3 ، علماً أنهما واقعتان في طرفي قضيب صلب مهمل الكتلة.
4- مجموعة مادية مكونة من قضيب مادي ونقطتين في طرفيه ، تتحرك المجموعة في R^3 .
5- مجموعة مادية مكونة من صفيحة مادية مستوية صلبة بشكل مثلث و ثلاث نقط مادية متوضعة في رؤوسه و تتحرك المجموعة في R^3 .
6- مجموعة مادية مكونة من صفيحة مادية مستوية بشكل مثلث تتحرك في R^3 ، وثلاث نقط مادية تتحرك كل منها على ضلع من أضلاعها.
7- مجموعة مادية مكونة من صفيحة مستطيلة الشكل تتحرك في R^3 وثلاث نقط مادية تتحرك في مستوي الصفيحة.
8- جسم صلب يتحرك حركة مستوية.
9- جسم صلب يتحرك حركة دورا نية حول محور ثابت منه.
10- جسم صلب يتحرك حركة دورا نية حول نقطة ثابتة منه.
11- مجموعة مادية مكونة من صفيحة مستطيلة مادية صلبة تتحرك حول أحد رؤوسها و نقطة مادية تتحرك في مستويها.

السؤال الثاني : (24 درجة):

صفيحة دائرية متجانسة كتلتها M ونصف قطرها r ، والمطلوب ، أوجد عزوم عطالتها بالنسبة لكل من محاور الجملة المتعامدة $OXYZ$ ، علماً أن O تقع على محيط الدائرة و OX على قطرها و OZ يعامد مستويها – ارسم الشكل و أوجد جداءات العطالة – أوجد عزوم عطالة هذه الصفيحة بالنسبة لكل من محاور الجملة المتعامدة $Oxyz$ ، حيث Ox يقع في مستوي الصفيحة و $((OZ,\hat{}\,Oz) = \frac{\pi}{3} ، (OX,\hat{}\,Ox) = \frac{\pi}{6})$.

السؤال الثالث : (17 درجة):

قضيبان OA , OB يشكلان مجموعة متماسكة والزاوية بينهما قائمة ، تتحرك هذه الزاوية في المستوي بحيث يمر OA من نقطة ثابتة A_1 و OB من نقطة ثابتة B_1 دوماً و طويلة $|A_1B_1| = 2L$ ، المطلوب أرسم الشكل المناسب وعيّن الوسطاء المستقلة – عيّن موضع المركز الآني للدوران هندسياً ثم بدلالة الوسطاء المستقلة في كلا المستويين الثابت والمتحرك – عيّن كلاً من منحنيي القاعدة و المتدحرج ولا تنس ذكر عناصرهما الرئيسية.

السؤال الرابع : (17 درجة):

جسم صلب يتحرك حول نقطة ثابتة منه O في الفضاء الثابت $OXYZ$ ، بحيث يوجد مستقيم متماسك معه يتحرك دوماً في المستوي الثابت OXY ، المطلوب ارسم الشكل المناسب وعيّن الوسطاء المستقلة للحركة – أوجد كلاً من سطحي مخروط القاعدة ومخروط المتدحرج ، علماً أن الوسطاء المستقلة توابع خطية للزمن وسم هذين السطحين واذكر محوري تناظرهما.

تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح حمص 06/ 09 / 2010 م. مدرس المادة : د. كامل محمد

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان الفصل الأول
2008 - 2009

مقرر: ميكانيك 2
المدة: ساعتان
الدرجة: 80

س1: أ- جسم صلب بشكل صفيحة مثلثية OAB متساوية الساقين تتحرك هذه الصفيحة حول رأسها الثابت O. برهن أن: $pro_{\overrightarrow{OA}} \vec{V}(A) = pro_{\overrightarrow{OB}} \vec{V}(B)$.

ب: مكعب $ABCD, A'B'C'D'$ يتحرك في الفضاء OXYZ بحيث يبقى الرأس A ملازماً لسطح الكرة $x^2+y^2+z^2=a^2$ و AB يبقى موازياً OZ و AA' يبقى مماساً OXZ.

[6]

المطلوب: 1- ما نوع حركة المكعب مع التعليل.
2- أوجد سرعة الرأس C بدلالة الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين الوضع.

س2- OO_1 قضيب يتحرك حول O (الثابت) في المستوي الثابت OXY ويرتبط في O_1 طرف قضيب آخر بشكل مفصلي (ليكن O_1M) بحيث يستطيع الحركة حول O_1 في المستوي OXY. إذا علمت أن قيمة متجه دوران القضيب OO_1 حول O هي ϕ وقيمة متجه دوران القضيب O_1M حول O_1 هي θ وأن $\phi \neq \theta$ و $|\overline{OO_1}| = a$, $|O_1M| = b$ فالمطلوب: استخدم مفاهيم تركيب الحركات في إيجاد ما يلي: 1- السرعة المطلقة للنقطة M بدلالة مركباتها في المستوي الثابت OXY.

[24]

2- التسارع المطلق للنقطة M بدلالة مركباته في المستوي الثابت OXY.

ج- يتحرك جسم صلب حول نقطة ثابتة منه O وفق القانون الزمني:
$\theta = \frac{\pi}{3}$, $\varphi = nt$, $\psi = ant + \frac{\pi}{2}$; $a, n \in R$

[18]

1- أوجد المركبات لـ $\vec{\omega}$ في الفضائين الثابت والمتحرك.
2- أوجد معادلتي سطحي كل من مخروط التدحرج ومخروط القاعدة ثم أوجد قيمة a ليكون المستوي XY سطح مخروط القاعدة.

س3: [22] أوجد عزوم العطالة الرئيسية لمخروط دوراني متجانس كتلته M ونصف قطر قاعدته R وارتفاعه h. أوجد: عزوم العطالة بالنسبة لكل من المحاور OX, OY و OZ رأسه O و OZ محور تناظره. وشكل معادلة سطح ناقص العطالة.

مدرس المقرر: د. ...

مع تمنياتنا لكم بالتوفيق والنجاح

ماجد ياسين

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الثاني
2009-2008
السنة الثالثة

المادة: ميكانيك 2
المدة: ساعتان
الدرجة: 80

أجب عن الأسئلة التالية

الدرجة : 16

السؤال الأول :

نفترض أنّ القضيب AB الذي طوله L يتحرك في المستوي المنسوب لجملة عطالية نظامية OXY بحيث يبقى طرفه A ملازما للمحور OX وطرفه B ملازما للمحور OY المطلوب:

1. ارسم الشكل المناسب وأثبت أنّ درجة حرية هذا القضيب تساوي واحد .
2. إذا علمت أنّ V قيمة متجه سرعة A على OX في لحظة ما t فأوجد متجه سرعة B على OY في نفس اللحظة t .
3. إذا كانت M نقطة ما من القضيب وطول AM يساوي λ فأوجد معادلة مسارها و أوجد سرعتها بدلالة الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القضيب .

الدرجة : 24

السؤال الثاني:

يتحرك قضيب AB متجانس كتلته M و طوله 2L ، في المستوي المنسوب إلى جملة عطالية نظامية OXY بحيث يستند هذا القضيب على محيط دائرة ثابتة (C , R) و OX مماس لها في O بينما ينزلق الطرف A على OX بسرعة ثابتة قيمتها V ، المطلوب :

1. ارسم الشكل المناسب و أوجد عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القضيب في المستوي ، وحددها .
2. عين سرعة مركز ثقل القضيب G بدلالة الوسطاء المستقلة .
3. أوجد المركز الآني للدوران و منحني القاعدة ومنحني المتدحرج .

الدرجة : 24

السؤال الثالث :

كرة صماء متجانسة كتلتها M ونصف قطرها r ، و جملة المقارنة النظامية OXYZ متماسكة معها علما أن O نقطة من سطحها و OZ محور قطري لها المطلوب :

1. أوجد عزوم العطالة للكرة بالنسبة إلى كل من O, OX,OY,OZ وجداءات العطالة .
2. أوجد المعادلة الديكارتية لسطح ناقص العطالة لهذه الكرة .

الدرجة : 16

السؤال الرابع :

اكتب نص نظرية أولر دالامبير و أثبت صحتها .

انتهت الأسئلة

مدرس المقرر : د. كامل محمد

تمنياتي لكم بالتوفيق و النجاح

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات
سنة ثالثة

امتحان الفصل الأول
٢٠٠٧ - ٢٠٠٨

المقرر: ميكانيك ٢
الدرجة: ٨٠
المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة التالية

[25] س I - اقرأ النصوص اللاحقة بتمعن واذكر عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين المجموعة المادية الموافقة مع التعليل، وارسم الشكل المناسب لها مبيناً عليه هذه الوسطاء:

١- OABC صفيحة مستطيلة الشكل تتحرك بحيث يكون رأسها O ثابتاً فقط.

٢- OABC صفيحة مستطيلة تتحرك بحيث يكون رأسها O ثابتاً وأحد ضلعيها المارين من O يبقى دوماً في المستوي الثابت OXY (الأفقي).

٣- قرص دائري صلب نصف قطره r، يتدحرج بدون انزلاق على المحيط الداخلي لسلك دائري ثابت نصف قطره R (حيث $r < R$).

٤- مخروط دوراني صلب نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h، يتحرك حول رأسه الثابت O بحيث يتدحرج بدون انزلاق على مستوٍ أفقي ثابت OXY.

٥- مجموعة مادية مكونة من قضيبين يتحركان في مستوٍ ثابت OXY علماً أن القضيب الأول OA يتحرك حول طرفه الثابت O، ويتمفصل مع أحد طرفي الثاني في A.

[12] س II - أجب بصح أو خطأ وصوّب الخطأ:

أ- $\vec{V} = b\dot{\theta}\vec{K} + \dot{\vec{\theta}} \wedge \vec{OM}$ سرعة نقطة M من جسم صلب S يتحرك حول محور ثابت Oz.

ب- $\vec{V} = \vec{V}(O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}$ سرعة نقطة M من جسم صلب حيث O_1 نقطة معينة من الجسم و $\vec{\omega}$ متجه دوران الجسم حول O_1.

ج- $\vec{V}_r = \vec{V}(O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}$ سرعة نسبية لنقطة M تتحرك بالنسبة لجملة متحركة في الفضاء بالنسبة لجملة ثابتة.

د- $\vec{V}_e = \dot{x}_1\vec{I}_1 + \dot{y}_1\vec{J}_1 + \dot{z}_1\vec{K}_1$ سرعة جر لنقطة M تتحرك في الفضاء المنسوب إلى $O_1x_1y_1z_1$ بالنسبة للفضاء الثابت OXYZ.

هـ- $\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}(O_1) + \vec{\varepsilon} \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega}(\vec{\omega} \wedge \vec{O_1M})$ تسارع جر لنقطة M تتحرك حركة مركبة.

و- الخاصة الأساسية لحركة جسم صلب S: $\vec{V}(A) = \vec{V}(B), \forall A, B \in S$.

س III - مخروط دوراني متجانس كتلته m، نصف قطر قاعدته R وارتفاعه h والمطلوب:

أ- $P_{x,y}$ و $P_{z,x}$ و $P_{y,z}$ و I_z و I_y و I_x حيث Oz محور تناظر المخروط و O رأسه.

ب- إذا تحرك المخروط حول رأسه الثابت O بحيث يبقى محور تناظره Oz_1 معامداً للثابت Oz فارسم الشكل المناسب وأوجد p و q و r ثم أوجد المعادلة الديكارتية لكل من سطح مخروط التدحرج وسطح مخروط القاعدة علماً أن الدوران الثالث: [illegible]

٢٠٠٨/١/٢٠

انتهت الأسئلة

- ١ -

سلم تصحيح امتحان مقرر الميكانيك

الفصل الأول ٢٠٠٧ – ٢٠٠٨

– أربع صفحات –

35

س٢- أ- عدد الوسطاء المستقلة ثلاثة (دورانات أولر) لأن حركة الصفيحة حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة منه O وليس عليها أية قيود أخرى

7

ب- عدد الوسطاء المستقلة وسيطان لأن حركة الصفيحة حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة منه O وأحد أضلاعها يبقى ملازماً للمستوي الأفقي (منطبق على خط العقد Ox_1) وهذا القيد ألغى الدوران الذاتي (ψ) حول Oz_1 وبالتالي يبقى الوسيطان الزاوية φ حول المحور الثابت والزاوية θ حول خط العقد

7

ج- عدد الوسطاء المستقلة وسيطان هما لأن القرص يتحرك حركة مستوية تتعين بثلاثة وسطاء هي: إحداثيا مركز الكتلة: $x(c)$ ، $y(c)$ وزاوية الدوران حول c وهي φ ولكن c يتحرك على دائرة نصف قطرها $R-r$ ويتعين موضعه بزاوية θ حيث $x(c) = (R-r)\cos\theta$ ، $y(c) =$ [illegible]

وبالتالي فإنه يبقى وسيطان مستقلان هما φ و θ

7



٤ - إن عدد الوسطاء المستقلة واحد ، لأن الحركة حركة جسم صلب حول نقطة ثابتة منه O (رأسه) فرض قيدان عليها بقاء أحد مولدات المخروط في المستوي الأفقي OXY فأصبحت زاوية النترجح ثابتة

$\theta = (\widehat{\vec{OZ}, \vec{OZ_1}}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$

حيث α نصف الزاوية الرأسية للمخروط . فيبقى دورانان هما الترنح $(\widehat{OX_1, OX})$ والدوران الذاتي $(\widehat{OX_1, OX_2})$ والشرط الثاني هو التدحرج بدون انزلاق يولد علاقة بين ψ و φ فيبقى أحدهما مستقلاً والآخر تابعاً له .

٥ - لهذه المجموعة وسيطان مستقلان لأن الحركة مستوية نثبت القضيب OA بثلاثة وسطاء هي احداثيات النقطة O وزاوية الدوران φ حول محور ثابت لكن O نقطة ثابتة فإحداثياتها معلومة ... مسبقاً [illegible] والباقي هو الوسيط φ

أما القضيب AB فإنه يتحرك حركة مستوية تتعين بشكل عام بثلاثة وسطاء هي θ+φ زاوية دورانه حول A و احداثيا A لكن احداثيا A تابعان لـ φ :

$X(A) = |OA|\cos\varphi$ و $Y(A) = |OA|\sin\varphi$

• إذن يتعين AB بـ θ و φ وهكذا نجد أن القضيبين يتعينان بالوسيطين θ و φ فقط .

II

12

أ - خطأ ويمكن تصويبه بأحد الشكلين :

$\vec{V} = \dot{b}\,\vec{K} + \vec{\dot\theta} \wedge \vec{OM}$ سرعة نقطة من جسم صلب يتحرك حركة لولبية حول محور ... (ثابت) .

أو $\vec{V} = \vec{\dot\theta} \wedge \vec{OM}$ سرعة نقطة من جسم يدور حول محور ثابت

[illegible] $\vec{\dot\theta} \wedge \vec{mM}$ حيث m مسقط M على محور الدوران

ب - صحيح .

ج - خطأ ونصححه بما يلي :

$\vec{V_e} = \vec{V}(O_1) + \vec{\omega} \wedge \vec{O_1M}$ سرعة جر

أو بالعلاقة $V_r = \dot{x}_1\vec{I}_1 + \dot{y}_1\vec{J}_1 + \dot{z}_1\vec{K}_1$ سرعة نسبية ... $\vec{I_1}, \vec{J_1}, \vec{K_1}$ متجهات الجملة المقارنة المتحركة والتي تتحرك النقطة M ...

د - خطأ والصواب يكون إحدى الآتي

$\vec{V}(A) = \vec{V}(B)\ \forall A, B \in S$ خاصة لحركة الانسحاب .

$\vec{rot}\,\vec{V}(A) = 2\vec{\omega}$ الخاصة الأساسية لحركة جسم صلب ...

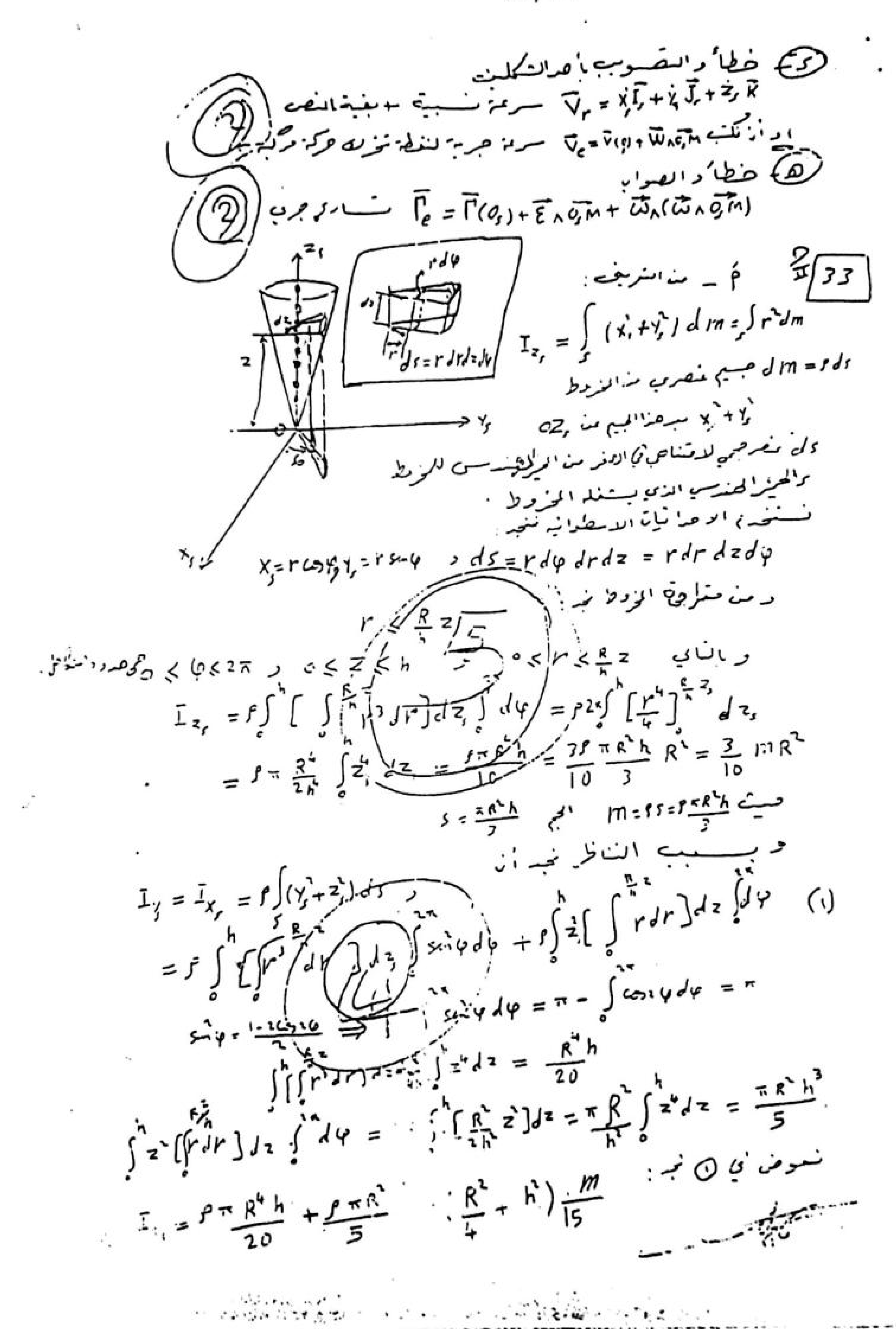
2

2

2

7

7



(د) خطأ والتصويب بإضافة كلمة

$\vec{V}_r = \dot{x}_1\vec{I}_1 + \dot{y}_1\vec{J}_1 + \dot{z}_1\vec{K}$ سرعة نسبية + بقية النص

إذ أن تلك $\vec{V}_e = \vec{v}(0_1) + \vec{\omega}\wedge\vec{O_1M}$ سرعة جرّ للنقطة تؤول كما لو كانت

(هـ) خطأ والصواب

$\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}(O_1) + \vec{\varepsilon}\wedge\vec{O_1M} + \vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{O_1M})$ تسارع جرّ

$\frac{2}{II}$ | 33

م - من التعريف :

$I_{z_1} = \int_S (x_1^2 + y_1^2)\, dm = \int_S r^2 dm$

$dm = \rho\, ds$ جسم عنصري من المخروط

$x_1^2 + y_1^2$ مربع بعد الجسم عن oz_1

ولنفرض من لا تناقض في الاختيار من المركز الهندسي للمخروط والحيز الهندسي الذي يشغله المخروط.

نستخدم الاحداثيات الاسطوانية نجد

$x_1 = r\cos\varphi,\ y_1 = r\sin\varphi$ و $ds = r\,d\varphi\,dr\,dz = r\,dr\,dz\,d\varphi$

ومن معادلة المخروط نجد

$r \le \frac{R}{h} z$

وبالتالي $0 \le r \le \frac{R}{h} z$ ، $0 \le z \le h$ ، $0 \le \varphi \le 2\pi$ وهي حدود التكامل.

$I_{z_1} = \rho \int_0^h \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr \right] dz_1 \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho\, 2\pi \int_0^h \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{\frac{R}{h}z_1} dz_1$

$= \rho\pi \frac{R^4}{2h^4} \int_0^h z_1^4\, dz = \frac{\rho\pi R^4 h}{10} = \frac{3\rho}{10}\frac{\pi R^2 h}{3} R^2 = \frac{3}{10} m R^2$

حيث $m = \rho S = \rho\frac{\pi R^2 h}{3}$ الحجم $S = \frac{\pi R^2 h}{3}$

وبسبب التناظر نجد أن

$I_{y_1} = I_{x_1} = \rho\int_S (y_1^2 + z_1^2)\, ds$

$= \rho \int_0^h \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr \right] dz \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi + \rho \int_0^h z^2 \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r\, dr \right] dz \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (1)$

$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \pi - \int_0^{2\pi} \cos 2\varphi\, d\varphi = \pi$

$\int_0^h \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r^3 dr \right] dz = \frac{R^4}{4h^4} \int_0^h z^4 dz = \frac{R^4 h}{20}$

$\int_0^h z^2 \left[\int_0^{\frac{R}{h}z} r\, dr \right] dz \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^h \left[\frac{R^2}{2h^2} z^2\right] dz = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z^4 dz = \frac{\pi R^2 h^3}{5}$

نعوض في ① نجد :

$I_{y_1} = \rho\pi\frac{R^4 h}{20} + \frac{\rho\pi R^2 h^3}{5} = \left(\frac{R^2}{4} + h^2\right)\frac{3m}{15}$

$$P_{x_1y_1} = P_{y_1z_1} = P_{z_1x_1} = 0$$

وذلك لان المحاور متماثلة بالنسبة لكل المستويين الاحداثيين y_1z_1 ، z_1x_1 ، x_1y_1

ث – مبدأ رسم المخروط مع رسم أويلر

نفرض في علاقات أويلر (أو بالاستدلال مباشرة) أن
على المحاور المتماسكة والثابتة $Ox_1y_1z_1$ ، $Oxyz$ بالترتيب)

نجد :

$$p_1 = \dot{\varphi} \sin\psi$$
$$q_1 = \dot{\varphi} \cos\psi$$
$$r_1 = \dot{\psi}$$

$$p = \dot{\psi} \sin\varphi$$
$$q = -\dot{\psi} \cos\varphi$$
$$r = \dot{\varphi}$$

معادلة المحور الآني للدوران في المحاور المتماسكة مع الجسم :

$$\frac{x_1}{p_1} = \frac{y_1}{q_1} = \frac{z_1}{r_1}$$ ؛ (حيث (x_1, y_1, z_1) احداثيات نقطة على المحور الآني في المحاور المتماسكة) $$\Rightarrow \frac{x_1}{\dot{\varphi}\sin\psi} = \frac{y_1}{\dot{\varphi}\cos\psi} = \frac{z_1}{\dot{\psi}}$$

وبحذف الوسيط من هاتين المعادلتين نحصل على معادلة سطح المخروط :

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{\dot{\varphi}^2}{\dot{\psi}^2} z_1^2$$

وهي معادلة سطح مخروطي $\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}}$ ظل نصف زاوية الرأس :

وبنفس الطريقة نحصل على معادلة سطح القاعدة :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{x}{\dot{\psi}\sin\varphi} = \frac{y}{-\dot{\psi}\cos\varphi} = \frac{z}{\dot{\varphi}} \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \frac{\dot{\psi}^2}{\dot{\varphi}^2} z^2$$

وبالتالي سطح القاعدة هو سطح مخروطي ظل نصف زاوية الرأس فيه هو :

جامعة ... / ط ٤
سلم تصحيح امتحان الميكانيك
فصل أول ٢٠٠٦ - ٢٠٠٧
... ب أرقام الصفحات

٢- أ- $OXYZ$ جملة عطالية ثابتة فيها OX, Y مستوي أفقي. $AX_1Y_1Z_1$ جملة مبدؤها مركز الصفيحة ومتماسكة مع القضيب OA حيث AX_1 محمول على القضيب OA و AY_1 موازٍ في مستوي الصفيحة و AZ_1 شاقولي عمودي في مستوي الصفيحة. تعيين حركة الصفيحة بوسيطين مستقلين $\varphi = (OX, AX_1)$ ، $\psi = (AY_1, AM)$ حيث ... محيط الصفيحة.

ب- يمكننا الإجابة بعدة طرق مطلوب من الطالب واحدة منها فقط:

• طريقة الحركة العامة لجسم صلب
$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{V}(M/R_A) = \dot{\varphi} \wedge \vec{OA} + (\dot{\psi} + \dot{\varphi}) \wedge \vec{AM}$

10

وحاصله بدلالة مركبات على محاور R_A أي على محاور R_0 والمطلوب أصلاً:
$\vec{V}(M/R_0) = -R\dot{\varphi}\cos\psi\,\vec{i}_1 + (L\dot{\varphi} - R\dot{\psi}\sin\psi)\vec{j}_1 + R\dot{\psi}\cos\psi\,\vec{K}_1$

أي
$\vec{V}(M/R_0) = -[R\dot{\varphi}\cos\psi\cos\varphi + (L\dot{\varphi} - R\dot{\psi}\sin\psi)\sin\varphi]\vec{i}$
$-[R\dot{\varphi}\cos\psi\sin\varphi - (L\dot{\varphi} - R\dot{\psi}\sin\psi)\cos\varphi]\vec{j} + R\dot{\psi}\cos\psi\,\vec{K}$
وهو المطلوب

• مفهوم الحركة المركبة للنقطة:
$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{\dot{\varphi}} \wedge \vec{OM} + \vec{\dot{\psi}} \wedge \vec{AM}$;
فنحصل على نفس الإجابة السابقة

• الطريقة العادية: نكتب $\vec{OM}$ بدلالة مركباته في R_A أولاً في R_0:
في R_A
$\vec{OM} = L\,\vec{i}_1 + R\cos\psi\,\vec{j}_1 + R\sin\psi\,\vec{K}_1$
ونشتق زمنياً في R_0 نحصل على سرعة M بدلالة مركبات في R_A كما في الجواب الأول

أو في R_0
$\vec{OM} = L(\cos\varphi - R\cos\psi\sin\varphi)\vec{i} + (L\sin\varphi + R\cos\psi\cos\varphi)\vec{j} + R\sin\psi\,\vec{K}$
ونشتق زمنياً في R_0 نحصل على سرعة M في R_0 بدلالة مركباتها على محاور R_0.

٣- نرمز للمستوي $z = -R$ بـ S_0 ، ولـ ... بـ S_0 ، وللصفيحة بـ S
شرط التدحرج بدون انزلاق ... نقطة واحدة ... (H)
$\vec{V}(H/S_0) = \vec{V}(H/S_1)$ ، $H \in S$ ، $H \in S_1$ ... $\vec{V}(H/S_0) = (L\dot{\varphi} + R\dot{\psi})\vec{j}_1$ و $\vec{V}(H/S_0) = 0$ ، $H \in S_1$

إذن شرط التدحرج بدون انزلاق: $L\dot{\varphi} + R\dot{\psi} = 0$

4

٦ - ٢

(A)

الجمهورية العربية السورية
جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الفصل الدراسي الأول
٢٠٠٦ – ٢٠٠٧

المادة: ميكانيك ٢
المدة: ساعتان
الدرجة: ٨٠

سلم تصحيح

س١ [30] توجد مجموعة ميكانيكية مكونة مما يلي: OA قضيب أفقي طوله L فيه O مفصل كروي يسمح للقضيب بالدوران حول محور شاقولي ثابت (OZ يتجه نحو الأعلى)، وصفيحة دائرية نصف قطرها R ويتمفصل مركزها مع القضيب في طرفه A بمفصل يجعل مستويها عامداً على القضيب دوماً ويسمح لها بالدوران حول القضيب، إذا تحركت هذه المجموعة وفق الإمكانات المذكورة آنفاً فالمطلوب مايلي: أ- ارسم الشكل المناسب واذكر الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الصفيحة في الفضاء الثابت $OXYZ$. ب- أوجد سرعة نقطة من محيط الصفيحة بدلالة الوسطاء المستقلة لحركتها بالنسبة للفضاء الثابت.

« ملاحظة: من أجل الإجابة عن أ و ب نعتبر محيط الصفيحة لا يستند على أي سطح مادي »

ج- إذا أضفنا إلى متن النص أعلاه الشرط التالي: يستند محيط الصفيحة الخشن في أدنى نقطة منه على مستوٍ أفقي ثابت خشن يمنع الانزلاق فأوجد مايلي:
أ- ما هي العلاقة الرياضية بين الوسطاء التي وجدتها في (أ)؟ ب- ما هو العدد الجديد للوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الصفيحة؟ ج- استنتج السرعة (الجديدة) لنقطة من محيط الصفيحة.

س٢ أجب عن اثنين مما يلي ولكل منهما [25]:

I- إذا كان π مستوياً ثابتاً و A، B نقطتان ثابتتان فيه والمسافة بينهما $2L$ وكانت (O_1X_1, O_1Y_1) زاوية قائمة صلبة تتحرك في المستوي الثابت بحيث يمر دوماً الضلع O_1X_1 من النقطة الثابتة A والضلع O_1Y_1 من النقطة الثابتة B فأوجد المنحني القاعدة والمنحني المدحرج لحركة هذه الزاوية بالطريقة الرئيسية بالتفصيل.

II- $OABC$ صفيحة مربعة الشكل طول ضلعها a تتحرك في الفضاء الثابت حول رأسها O وذلك بحيث يبقى ضلعها OA ملازماً للمستوي الأفقي الثابت. المطلوب:
أ- ارسم الشكل المناسب بناءً على الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين حركة الصفيحة
ب- مركبات متجه الدوران على كل من المحاور الثابتة والمتحركة.
ج- إذا كانت السرعة الزاوية للترنح والسرعة الزاوية للأرجحة ثابتتان فأوجد سطح زوايا القاعدة المتحرك

III- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية:

$$\dot{y}^2 = p^2 (a^2 - y^2)(b^2 + y^2)$$

مدرس المقرر: د. كامل محمد
في ٢٠٠٧/١/١٠

تمت الأسئلة
مع تمنياتي لكم بالنجاح الدائم

جامعة [illegible]

سلم تصحيح امتحان الميكانيك

فصل أول

2006 - 2007

[illegible]

10 د

1- أ- $OXYZ$ جملة مقارنة ثابتة فيها OXY مستوٍ أفقي. $AX_1Y_1Z_1$ جملة مبدؤها مركز الصفيحة ومتماسكة مع القضيب OA حيث AX_1 محمول على القضيب OA و AY_1 محور أفقي في مستوي الصفيحة و AZ_1 شاقولي عمودي على مستوي الصفيحة. تعيين مركز الصفيحة بوسيطين مستقلين $\varphi=(\widehat{OX, AX_1})$ ، $\psi=(\widehat{AY_1, AM})$ حيث تدور حول الصفيحة.

15

2- يمكننا الإجابة بعدة طرق مطلوب من الطالب واحدة منها فقط:

• طريقة الحركة النسبية [illegible] $\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}(A/R_0) + \vec{V}(M/R_A) = \dot{\vec\varphi} \wedge \vec{OA} + (\dot{\vec\varphi}+\dot{\vec\psi}) \wedge \vec{AM}$

وحساب [illegible] المركبات على محاور R_A أو على محاور R_0 والمطلوب أحدهما:

10

$$\vec{V}(M/R_0) = -R\dot\varphi\cos\psi\,\vec{i}_1 + (L\dot\varphi - R\dot\psi\sin\psi)\,\vec{j}_1 + R\dot\psi\cos\psi\,\vec{k}_1$$

أو

$$\vec{V}(M/R_0) = -[R\dot\varphi\cos\psi\cos\varphi + (L\dot\varphi - R\dot\psi\sin\psi)\sin\varphi]\,\vec{i}$$
$$-[R\dot\varphi\cos\psi\sin\varphi - (L\dot\varphi - R\dot\psi\sin\psi)\cos\varphi]\,\vec{j} + R\dot\psi\cos\psi\,\vec{k}$$

وهو المطلوب

• مفهوم الحركة المركبة للنقطة:

$$\vec{V}(M/R_0) = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \dot{\vec\varphi} \wedge \vec{OM} + \dot{\vec\psi} \wedge \vec{AM};$$

فنحصل على نفس الإجابة السابقة

• الطريقة العادية: نكتب $\vec{OM}$ بدلالة مركباته في R_A أو في R_0:

في R_A

$$\vec{OM} = L\,\vec{i}_1 + R\cos\psi\,\vec{j}_1 + R\sin\psi\,\vec{k}_1$$

ونشتق زمنياً في R_0 فنحصل على سرعة M بدلالة مركبات في R_A كما في الجواب الأول

أو في R_0

$$\vec{OM} = L(\cos\varphi - R\cos\psi\sin\varphi)\,\vec{i} + (L\sin\varphi + R\cos\psi\cos\varphi)\,\vec{j} + R\sin\psi\,\vec{k}$$

ونشتق زمنياً في R_0 فنحصل على سرعة M في R_0 بدلالة مركباتها على محاور R_0.

3- أ- نرمز للمستوي $z=-R$ بـ S_0 وللصفيحة بـ S_1 ، [illegible] S_0 ، [illegible]

شرط التدحرج بدون انزلاق [illegible] نقطة واحدة مشتركة (H):

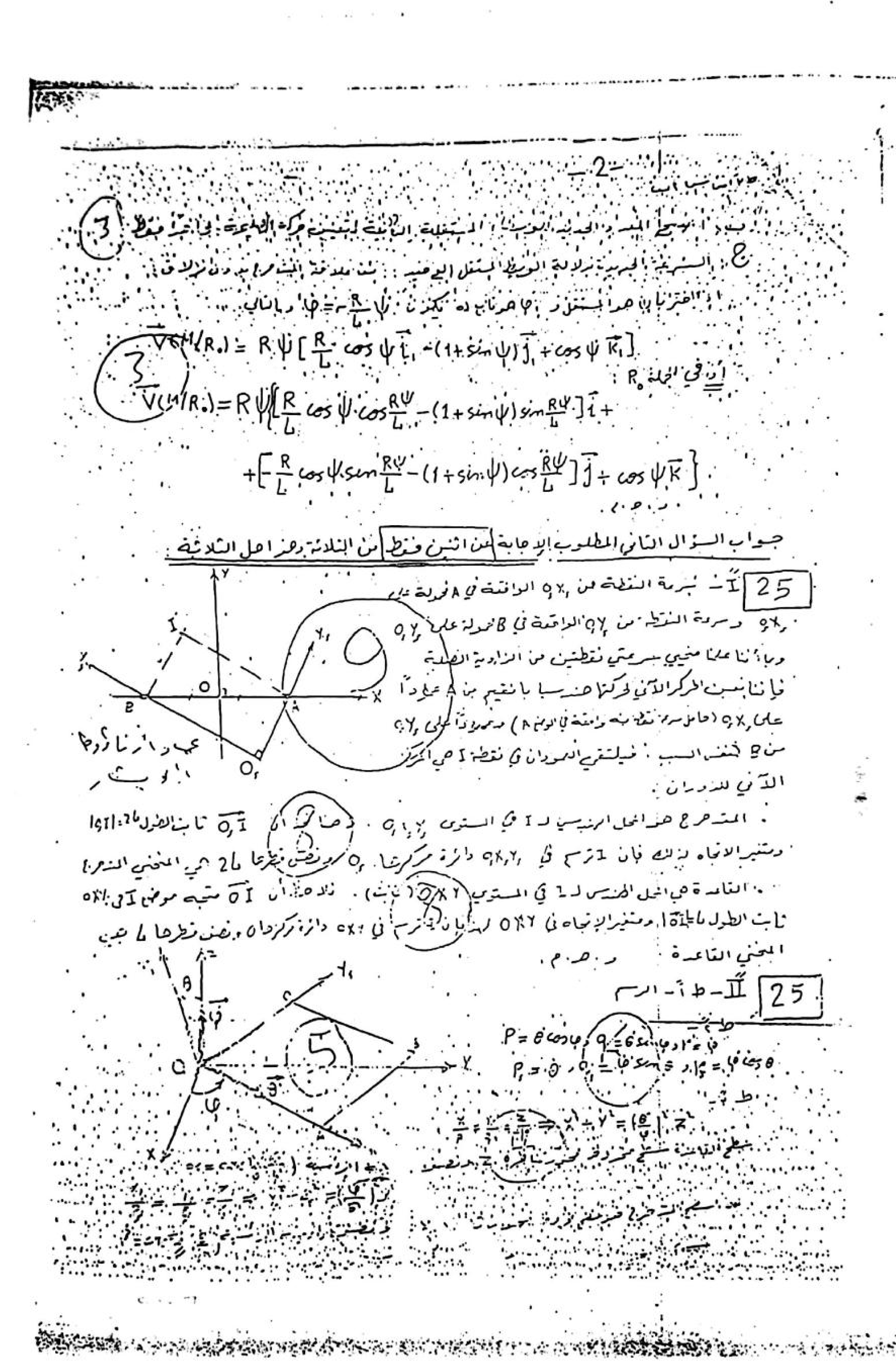
$$\vec{V}(H/S_0)_{H\in S_0} = \vec{V}(H/S_0)_{H\in S_1}$$

$$\vec{V}(H/S_0)_{H\in S_0} = 0 \quad , \quad \vec{V}(H/S_0)_{H\in S_1} = (L\dot\varphi + R\dot\psi)\,\vec{i}_1$$

4

ومنه شرط التدحرج بدون انزلاق [illegible] $L\dot\varphi + R\dot\psi = 0$

2 - 6



-2-

ب- أ- أوضح المبدأ الجديد للوضعية المستقلة التابعة لتعيين حركة الجامد في أجزاء مقط (3)

ج: السرعة الجديدة بدلالة الوسيط المستقل المعطى: من ملاحظة المبدأ بدون انزلاق،

إذا افترضنا ψ هو المستقل و φ هو تابع له يكون: $\varphi = -\frac{R}{L}\psi$ وبالتالي

$$\vec{V}(M/R_0) = R\dot{\psi}\left[\frac{R}{L}\cos\psi\,\vec{i}_1 - (1+\sin\psi)\vec{j}_1 + \cos\psi\,\vec{K}_1\right]$$

إذاً في الجملة R_0:

(3)

$$\vec{V}(M/R_0) = R\dot{\psi}\Big\{\left[\frac{R}{L}\cos\psi\cos\frac{R\psi}{L} - (1+\sin\psi)\sin\frac{R\psi}{L}\right]\vec{i} +$$

$$+\left[-\frac{R}{L}\cos\psi\sin\frac{R\psi}{L} - (1+\sin\psi)\cos\frac{R\psi}{L}\right]\vec{j} + \cos\psi\,\vec{K}\Big\}$$

و.ه.م.

جواب السؤال الثاني المطلوب الإجابة عن اثنين فقط من الثلاثة وهذا حل الثلاثة:

25 | I- سرعة النقطة من OX_1 الواقعة في A محمولة على OX_1 وسرعة النقطة من OY_1 الواقعة في B محمولة على OY_1 وبما أننا نعلم منحى سرعتي نقطتين من الزاوية الصلبة فإننا نعين المركز الآني لحركتها هندسياً بالتقيم من A عمودياً على OX_1 (حامل سرعة نقطة منه واقعة في الموضع A) وعمودياً على OY_1 من B بنفس السبب، فيلتقي العمودان في نقطة I هي المركز الآني للدوران.

(9)

- المتدحرج هو المحل الهندسي لـ I في المستوى $O_1X_1Y_1$، وما أن $\overline{O_1I}$ ثابت الطول $|O_1I| = 2a$ ومتغير الاتجاه لذلك فإن I ترسم في OX_1Y_1 دائرة مركزها O_1 ونصف قطرها 2a هي المنحني المتدحرج.
- القاعدة هي المحل الهندسي لـ I في المستوي OXY (ثابت). ذلك أن $\overline{OI}$ متجه موضع I في OXY ثابت الطول ما يساوي a ومتغير الاتجاه في OXY لهذا فإن I ترسم في OXY دائرة مركزها O ونصف قطرها a هي المنحني القاعدة.

و.ه.م.

25 | II- ط أ- الرسم

(5)

$P = \theta\cos\varphi$ ، $q = \theta\sin\varphi$

$P_1 = 0$ ، $q_1 = \dot{\theta}\sin\varphi$

$$\frac{x}{P} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{\theta}{\dot{\psi}}\right)^2 z^2$$

سطح القاعدة مخروط دوراني ... نصف زاوية رأسه ...

المتدحرج مخروط دوراني ...

III - الحل المسألة : $y'^2 = p^2(a^2-y^2)(b^2+y^2)$ ؛ نلاحظ أن $y'=0$ عندما $y=\pm a$

أولاً إن حل هذه المعادلة خط دوري في المجال $-a \le y \le a$ حيث اخترنا $0<a$

ثانياً نحول المعادلة إلى معادلة للجيب الناقصية وفق المراحل:

نجري التحويل الأول $y = az$ حيث $-1 \le z \le 1$

فنحصل على:

$$z'^2 = p^2(1-z^2)(b^2+a^2z^2)$$

(10)

نجري التحويل الثاني: $1-z^2 = x^2$ فنحصل على

$$x'^2 = p^2(b^2+a^2)(1-x^2)\left(1-\frac{a^2}{b^2+a^2}x^2\right)$$

وهذه هي معادلة للجيب الناقصية فيها

$$0 < \lambda^2 = \frac{a^2}{b^2+a^2} < 1$$

$$\omega^2 = p^2(b^2+a^2)$$

وحلها الدالة:

(10) $$x = sn(p\sqrt{b^2+a^2}\,t+\beta)$$

حيث β ثابت تكامل نحصل عليه من شروط البدء.

نعوض في التحويل الثاني نجد:

$$z = \sqrt{1-x^2} = cn(p\sqrt{b^2+a^2}\,t+\beta)$$

نعوض في التحويل الأول نجد:

$$y = a\,cn(p\sqrt{b^2+a^2}\,t+\beta)$$

وهذا الحل دوري ودوره

(5) $$T = \frac{2\pi}{p\sqrt{b^2+a^2}}F\left(\tfrac12, \tfrac12, 1, \frac{a^2}{b^2+a^2}\right)$$

وسعته $2a$ ، وهو المطلوب.

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات
سنة ثالثة

الدورة التكميلية ٢٠٠٩-٢٠١٠
ميكانيك ٢

70 | س١- اقرأ ما يلي بإمعان ثم أجب عن الأسئلة اللاحقة:

أ- قضيب يتحرك في الفضاء الثلاثي الأبعاد حول نقطة ثابتة منه واقعة في أحد طرفيه.

ب- قضيب يتحرك في المستوي بحيث يتحرك طرفاه على محورين متعامدين.

جـ- مكعب يتحرك في الفضاء الثلاثي الأبعاد حول رأس ثابت من رؤوسه

د- صفيحة مستطيلة الشكل تتحرك حول رأس ثابت من رؤوسها وأحد أضلاعها يبقى ملازماً لمستوٍ أفقي ثابت OXY

هـ- قرص دائري يتحرك في المستوي الشاقولي الثابت بحيث يتدحرج بدون انزلاق على مستقيم أفقي ثابت وواقع في مستوي الحركة

المطلوب: ما عدد الوسطاء المستقلة الكافية لتثبيت أركة كل جسم من وسمِّ هذه الوسطاء وبينها في الرسم المناسب.

24 | س٢- صفيحة مستطيلة الشكل متجانسة كتلتها m وطولها a وعرضها $2L$

١- أوجد I_x, I_y, I_z حيث OX محمول على طولها و OY محمول على عرضها و OZ ناظمي و O أحد رؤوسها.

16 | س٣- قضيب AB يتحرك في المستوي OXY بحيث A يلازم OX و B يلازم OY. أوجد منحني القاعدة والمتدحرج وذلك بالطريقة التحليلية.

مع التمنيات بالتوفيق (2L)

تمت الأسئلة

مدرس المقرر: د. ... علي

سلم تصحيح ميكانيك "الصفحتان" -1-
تكميلية ٢٠٠٦ - ٢٠٠٧

١- أ- م يعدد ولوسطاء المستقلة الثلاثة لتعيين حركة قضيب يتحرك حول طرفه الثابت هو اثنان فقط وهما: φ الترنح ، θ التأرجح حيث أن القضيب لا يتمتع بدوران ذاتي. (6)

ب- تتعين حركة قضيب يستند طرفاه على محورين متعامدين بوسيط مستقل واحد هو θ (6)

ج- تتعين حركة مكعب يتحرك حول رأسه الثابت بثلاثة وسطاء مستقلة هي φ ترنح ، ψ دوران ذاتي ، θ تأرجح (زوايا أولر) (6)

د- تتعين حركة صفيحة مثلثية حول رأسها الثابت O ومن ضلعها يتحرك في OXY بوسيطين مستقلين هما φ ترنح ، θ تأرجح (6)

هـ- تتعين الحركة المستوية لقرص يتدحرج بدون انزلاق على مستقيم واقع في مستوي الحركة بوسيط واحد x فاصلة مركز القرص أو φ زاوية دوران القرص حول مركز القرص. (6)

ج ٢ [24]

من تعريف عزم العطالة بالنسبة لمحور

$I_x = \int r^2 dm \quad ; \quad r = y$ (بعد الجسم العنصري عن ox) و $dm = \rho\, ds = \rho\, dx\, dy$

(2) $= \rho \int y^2 ds = \rho \int_0^{4L} y^2 dy \int_0^{L} dx = \rho \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{4L} \cdot [x]_0^{L} = \frac{\rho}{3} 64L^3\, 2L = \frac{\rho(4L\cdot 2L)}{3} 16L^2$

$I_x = \frac{16\,4\,mL^2}{3} \quad ; \quad m = \rho S = \rho\, 8L^2$

وبنفس الطريقة

(8) $I_y = \int r^2 dm \quad ; \quad r = x$ (بعد الجسم العنصري عن oy)

$= \rho \int x^2 ds = \rho \int_0^{2L} x^2 dx \int_0^{4L} dy = \frac{\rho}{3}[x^3]_0^{2L} \cdot [y]_0^{4L} = \frac{\rho\, 8L^3 \cdot 4L}{3} = \frac{\rho(2L\cdot 4L)}{3} \cdot 4L^2 = \frac{4mL^2}{3}$

وبما أن الجسم صفيحة مستوية و oz ناظمها فإن

(8) $I_z = I_x + I_y = 20mL^2$

ج: نأخذ منتصف القضيب O_1 قطباً

$X(O_1) = L \sin\theta \;,\; Y(O_1) = L\cos\theta$

حيث $2L = |AB|$ زمناً.

- لتعيين المنحني المتدحرج تحليلياً علينا أولاً إيجاد احداثيات المركز الآني للدوران $X_1(I), Y_1(I)$ في المستوي المتحرك:

$$X_1(I) = \frac{-[\vec{V}(O_1)]_{Y_1}}{\dot\theta} \;,\; Y_1(I) = \frac{[\vec{V}(O_1)]_{X_1}}{\dot\theta} \qquad (1)$$

وهذا يتطلب حساب $\vec{V}(O_1)$ بدلالة مركباتها على المحاور المتماسكة لذلك نقوم بالتالي

$$\vec{V}(O_1) = \dot X(O_1)\,\vec{i} + \dot Y(O_1)\,\vec{j} = \dot\theta L\cos\theta\,\vec{i} - \dot\theta L\sin\theta\,\vec{j}$$ (في الاحداثيات الثابتة)

ومن جهة اخرى

$$\vec{V}(O_1) = [\vec{V}(O_1)]_{X_1}\vec{i_1} + [\vec{V}(O_1)]_{Y_1}\vec{j_1}$$

وحسابها نجد:

$$[\vec{V}(O_1)]_{X_1} = \dot\theta L\cos^2\theta - \dot\theta L\sin^2\theta = \dot\theta L(1-2\sin^2\theta) = \dot\theta L\cos 2\theta$$

$$[\vec{V}(O_1)]_{Y_1} = -\dot\theta L\sin\theta\cos\theta - \dot\theta L\sin\theta\cos\theta = -2L\dot\theta\sin\theta\cos\theta = -L\dot\theta\sin 2\theta$$

نعوضها في (1) فنجد:

$$X_1(I) = L(1-2\sin^2\theta) \;,\; Y_1(I) = -2L\sin\theta\cos\theta$$

او:

$$X_1(I) = L\cos 2\theta \;,\; Y_1(I) = -L\sin 2\theta$$

وبحذف الوسيط نجد ان معادلة المنحني المتدحرج هي $X_1^2(I) + Y_1^2(I) = L^2$ وبالتالي فالمنحني المتدحرج هو دائرة مركزها القطب O_1 ونصف قطرها يساوي L

- تعيين المنحني القاعدة تحليلياً نعين احداثيات المركز الآني للدوران في الاحداثيات الثابتة:

$$X(I) = X(O_1) - \frac{\dot Y(O_1)}{\dot\theta} \;,\; Y(I) = Y(O_1) + \frac{\dot X(O_1)}{\dot\theta}$$

وبالتالي:

$$X(I) = L\sin\theta + L\sin\theta = 2L\sin\theta$$

$$Y(I) = L\cos\theta + L\cos\theta = 2L\cos\theta$$

وبحذف الوسيط نجد أن معادلة المنحني القاعدة هي $X^2(I) + Y^2(I) = 4L^2$.

أي أن القاعدة دائرة مركزها O ونصف قطرها 2L

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر التكاليات ٢
لطلاب السنة الثالثة رياضيات

العلامة: ٨٠
المدة: ساعتان

عماد أرناؤوط
١٥٥٦٤

أجب عن الأسئلة الآتية:

س١: اذكر الوسطاء المستقلة مع التعليل وتوضيح ذلك بالرسم المناسب لكل من المجموعات التالية:

[30] أ) قضيب يتحرك في المستوي. ب) قضيب يتحرك في المستوي بحيث يتحرك مركزه على مستقيم ثابت. ج) قضيب يتحرك بحيث أحد طرفيه على محور شاقولي وطرفه الآخر على مستوٍ أفقي. د) مجموعة مادية مكونة من القضيبين OA و BC متحركين في المستوي OXY حيث O مفصل ثابت و الطرف A يتمفصل مع القضيب BC في مركز كتلته.

هـ) صفيحة مستطيلة الشكل فيها أحد رؤوسها ثابت

و) صفيحة مستطيلة الشكل فيها أحد رؤوسها ثابت وضلعها الطويلة تبقى في المستوي الأفقي.

س٢: OXYZ جملة محاور إحداثية ثابتة (قائمة ومباشرة) و C محيط الدائرة

[27] التي مركزها O ونصف قطرها R وأحد أقطارها يقع على المحور الشاقولي OZ ولتكن M نقطة مادية تتحرك على C بحركة متغيرة بانتظام قيمة سرعتها الزاوية ثابتة $\dot{\varphi}=\omega t$ وبنفس الوقت يدور C حول OZ بدوران منتظم حيث $\vec{\Theta}=\omega\vec{k}$ ثابتة.

إذا علمت أن M كانت في لحظة البدء على المحور OX وأنها تحركت نحو الأعلى،

فالمطلوب:

١- تعيين إحداثيات M في الجملة الثابتة بدلالة الزمن t.

٢- تعيين سرعة وتسارع M اعتماداً على تركيب الحركات.

س٣: ليكن S مخروط دوراني كتلته M وارتفاعه h ونصف قطر قاعدته R.

[23] أوجد: I_x، I_y، I_z علماً أن OZ منطبق على حامل الارتفاع و O مركز القاعدة.

مع تمنياتي لكم بالنجاح
مدرس المقرر: د. [illegible]

تمت الأسئلة
حمص في / / ٢٠٠٧

لا تنس تحي
نظرية (١) فتزها مع حلها

٨

(١)

سلم تصحيح امتحان الميكانيك ٢ / ١
سنة ثالثة ٧ الفصل الثاني ٢٠٠٦ - ٢٠٠٧ (٥)
(أربع صفحات)

- الوسطاء المستقلة لحركة قضيب في مستو: الحركة مستوية دون أية قيود تتعين بثلاثة وسطاء مستقلة هي احداثيات C مركز الكتل: (X,Y) و θ زاوية دوران القضيب حول C

(5)

- الوسطاء المستقلة لحركة قضيب في مستو علماً أن مركز كتله يتحرك على مستقيم ثابت هي وسيطان مستقلان X فاصلة C مركز الكتل و θ زاوية دوران القضيب حول C حيث اخترنا المحور OX محمولاً على المستقيم الثابت الذي يتحرك عليه C حيث انخفضت درجة الحرية درجة واحدة بسبب قيد بجهة واحدة

(5)

- تتعين حركة القضيب الذي يستند طرفه A على OX (الأفقي) ويستند طرفه B على OY (الشاقولي) بالوسطاء (X,Y) و $(\widehat{CX},\widehat{CB})=\theta+\frac{\pi}{2}$ زاوية دوران القضيب حول C لكن $Y=\frac{l}{2}\cos\theta$ و $X=\frac{l}{2}\sin\theta$ وبالتالي احداثيات مركز الكتل C وزاوية الدوران حول C جميعها تتبع لـ θ المبينة في الشكل وبالتالي فالوسيط المستقل الوحيد هو θ.

(5)

- المجموعة مكونة من قضيبين كما في الشكل وتتعين حركتها في المستوي بالوسيطين المستقلين θ و φ لأن احداثيي مركز كتل القضيب OA يتبعان لزاوية دورانه حول O (وهي θ) واحداثيي مركز كتل القضيب BC يتبعان لزاوية دوران القضيب OA حول O (وهي θ) حيث D مركز كتل OA:

$$X(D)=\frac{|\overline{OA}|}{2}\cos\theta\ ,\ Y(D)=\frac{|\overline{OA}|}{2}\sin\theta$$

A مركز كتل BC:

$$X(A)=|\overline{OA}|\cos\theta\ ,\ Y(A)=|\overline{OA}|\sin\theta$$

واحداثيات φ زاوية دوران القضيب BC حول مركز كتلته

(5)

- الصفيحة المستطيلة تتعين بزاويتي الترنح φ والتأرجح θ المستقلتين فقط لأن الصفيحة جسم صلب يتحرك حول نقطة ثابتة (احد رؤوسه) ونفرض عليها القيد: ضلعها يبقى في المستوي الافقي وبالتالي دورانها الذاتي ...

(5)

- تتعين حركة الصفيحة المستطيلة الشكل حول رأسها الثابت بزوايا أولر المستقلة θ التأرجح و φ الترنح و ψ الدوران الذاتي لأنه لا توجد قيود أخرى ... حول نقطة ثابتة دون أية قيود أخرى

(5)

(30)

2

عماد أرناؤوط أبو بكر

ملاحظة: يكفي الطالب أن يحسب السرعة والتسارعات بدلالة مركباتها في جملة مقارنة واحدة (في المتماسكة أو الثابتة) فقط

ح: نأخذ $OXYZ$ جملة ثابتة فيها OZ شاقولي

و $OX_1Y_1Z_1$ جملة متماسكة مع محيط الدائرة C وفيها OZ_1 منطبق على OZ. كما في الشكل حيث C يقع في المستوي OX_1Z_1.

ط:

$$\vec{OM} = R\cos\varphi\,\vec{i}_1 + R\sin\varphi\,\vec{K}_1 , \quad \vec{K}_1 = \vec{K}$$

$$X_1 = R\cos\varphi , \quad Y_1 = 0 , \quad Z_1 = R\sin\varphi$$

وبالإسقاط على محاور $OXYZ$ نجد:

$$X = R\cos\varphi\cos\theta = R\cos\frac{\omega t^2}{2}\cos\omega t$$

$$Y = R\cos\varphi\sin\theta = R\cos\frac{\omega t^2}{2}\sin\omega t$$

$$Z = R\sin\varphi = R\sin\omega t$$

$$\varphi = \int\dot{\varphi}\,dt = \int\omega t\,dt = \frac{\omega}{2}t^2 + c_1$$

$$\theta = \int\dot{\theta}\,dt = \int\omega\,dt = \omega t + c_2$$

ومن شروط البدء نجد أن $c_1 = c_2 = 0$.

ط: أولاً سرعة M:

طريقة أولى في الجملة المتماسكة مع C

$$\vec{V}(M) = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\vec{V}_r = \dot{X}_1\vec{i}_1 + \dot{Y}_1\vec{j}_1 + \dot{Z}_1\vec{K}_1 = -R\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i}_1 + R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{K}_1$$

العلاقة نسبية

$$\vec{V}_e = \dot{\vec{\theta}}\wedge\vec{OM} = \dot{\theta}X_1\vec{j}_1 = R\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{j}_1$$

$$\vec{V} = -R\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{i}_1 + R\dot{\theta}\cos\varphi\,\vec{j}_1 + R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{K}_1$$

$$\vec{V} = -R\omega t\sin\frac{\omega t^2}{2}\,\vec{i}_1 + R\omega\cos\frac{\omega t^2}{2}\,\vec{j}_1 + R\omega t\cos\frac{\omega t^2}{2}\,\vec{K}_1$$

طريقة ثانية في الجملة الساكنة

ويمكن الحصول عليها بدلالة مركباتها على المحاور الثابتة وذلك بتعويض ونفس الخطوات

$$\vec{i}_1 = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} , \quad \vec{j}_1 = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} , \quad \vec{K}_1 = \vec{K}$$

فنحصل على

$$\vec{V} = (-R\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta - R\dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta)\vec{i} + (-R\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta + R\dot{\theta}\cos\varphi\cos\theta)\vec{j} + R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{K}$$

أي:

$$V = \left(-R\omega t\sin\frac{\omega t^2}{2}\cos\omega t - R\omega\cos\frac{\omega t^2}{2}\sin\omega t\right)\vec{i} + \left(-R\omega t\sin\frac{\omega t^2}{2}\sin\omega t + R\omega\cos\frac{\omega t^2}{2}\cos\omega t\right)\vec{j} + R\omega t\cos\frac{\omega t^2}{2}\,\vec{K}$$

3

$$\vec{V}_r = -R\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i} - R\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + R\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{k}$$

$$\vec{V}_e = \dot{\theta}\,\vec{k}\wedge(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = -\dot{\theta}y\,\vec{i} + \dot{\theta}x\,\vec{j}$$

$$= -\dot{\theta}R\cos\varphi\sin\theta\,\vec{i} + \dot{\theta}R\cos\varphi\cos\theta\,\vec{j}$$

حماد أرناؤوط

ط: ثانياً تسارع M:

طريقة أولى في الجملة المتحركة

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_r + \vec{\Gamma}_e + \vec{\Gamma}_c$$

$$\vec{\Gamma}_r = \ddot{X}_s\vec{i}_s + \ddot{Y}_s\vec{j}_s + \ddot{Z}_s\vec{k}_s$$

$$\ddot{X}_s = -R\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \;,\; \ddot{Y}_s = 0 \;,\; \ddot{Z}_s = R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\vec{\Gamma}_e = \ddot{\theta}\wedge\vec{OM} - \dot{\theta}^2\,\vec{mM} \;;\quad (m \text{ مسقط عمودي لـ } M \text{ على } oz)$$

$$= \ddot{\theta}\,\vec{K}_s\wedge(X_s\vec{i}_s + Y_s\vec{j}_s + Z_s\vec{k}_s) - \dot{\theta}^2(X_s\vec{i}_s + Y_s\vec{j}_s)$$

$$= \ddot{\theta}X_s\vec{j}_s - \dot{\theta}^2X_s\vec{i}_s = R\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{j}_s - \dot{\theta}^2R\cos\varphi\,\vec{i}_s = -\dot{\theta}^2R\cos\varphi\,\vec{i}_s + R\ddot{\theta}\cos\varphi\,\vec{j}_s$$

$$\vec{\Gamma}_c = 2\dot{\theta}\,\vec{K}_s\wedge\vec{V}_r = -2\dot{\theta}R\dot{\varphi}\sin\varphi\,\vec{j}_s$$

$$\vec{\Gamma} = (-R\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi - \dot{\theta}^2R\cos\varphi)\vec{i}_s + (R\ddot{\theta}\cos\varphi - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi)\vec{j}_s$$

$$+ (R\ddot{\varphi}\cos\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{K}_s \quad ;\; \dot{\varphi} = \omega t,\; \ddot{\varphi} = \omega,\; \dot{\theta} = \omega,\; \ddot{\theta} = 0$$

$$\vec{\Gamma} = (-R\omega\sin\tfrac{\omega t^2}{2} - R\omega^2t^2\cos\tfrac{\omega t^2}{2} - R\omega^2\cos\tfrac{\omega t^2}{2})\vec{i}_s - 2R\omega^2t\sin\tfrac{\omega t^2}{2}\,\vec{j}_s$$

$$+ (R\omega\cos\tfrac{\omega t^2}{2} - R\omega^2t^2\sin\tfrac{\omega t^2}{2})\vec{K}_s$$

9

طريقة ثانية في الجملة الثابتة

ويمكن إعادة العمل بالحساب بدلالة مركبات التسارعات على محاور الجملة الثابتة.

$$\vec{K}_s = \vec{K} \;\&\; \ddot{Y}_s = Y_s = 0$$

$$\vec{\Gamma}_r = \ddot{X}_s(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + \ddot{Z}_s\vec{K}$$

$$= -R(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}) + R(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{K}$$

$$\vec{\Gamma}_e = \ddot{\theta}\,\vec{K}\wedge(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) - \dot{\theta}^2(x\vec{i} + y\vec{j}) = -\ddot{\theta}y\,\vec{i} + \ddot{\theta}x\,\vec{j} - \dot{\theta}^2x\,\vec{i} - \dot{\theta}^2y\,\vec{j}$$

$$= -(\ddot{\theta}y + \dot{\theta}^2x)\vec{i} + (\ddot{\theta}x - \dot{\theta}^2y)\vec{j} \quad ,\; \theta = \omega t \Rightarrow \dot{\theta} = \omega,\; \ddot{\theta} = 0$$

$$= -\dot{\theta}^2R\cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} - R\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{\Gamma}_c = -2\dot{\theta}[\vec{V}_r]_y\vec{i} + 2\dot{\theta}[\vec{V}_r]_x\vec{j} = +2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta\,\vec{i} - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta\,\vec{j}$$

$$\vec{\Gamma} = [-R(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\cos\theta - \dot{\theta}^2R\cos\varphi\cos\theta + 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\theta]\vec{i}$$

$$+ [-R(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi)\sin\theta - R\dot{\theta}^2\cos\varphi\sin\theta - 2R\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\theta]\vec{j}$$

$$+ R(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi)\vec{k} \quad ;\; \varphi = \tfrac{\omega t^2}{2},\; \dot{\varphi} = \omega t,\; \ddot{\varphi} = \omega,\; \theta = \omega t,\; \dot{\theta} = \omega$$

4

حساب I_x, I_y, I_z للمخروط حيث $Oxyz$ جملة مقارنة متماسكة معه، O مركز قاعدته و Oz محور تناظره، وهو متجانس. من التعريف:

$$I_x = \int_V (y^2+z^2)\,dm = \rho\int_V (y^2+z^2)\,dV \;;\; V = r\,dr\,dz\,d\varphi$$

$$0 \le r \le \frac{R}{h}(h-z) \qquad 0\le\varphi\le 2\pi$$

وفي الإحداثيات الإسطوانية: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ z = z$

$$I_x = \rho\int_0^h\left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r^3\,dr\right]dz\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi + \rho\int_0^h z^2\left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r\,dr\right]dz\int_0^{2\pi}d\varphi \quad (1)$$

- $\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r^3\,dr = \frac{R^4}{4h^4}(h^4-4h^3z+6h^2z^2-4hz^3+z^4)$
- $\int_0^h\left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r^3\,dr\right]dz = \frac{R^4}{4h^4}\int_0^h (h^4-4h^3z+6h^2z^2-4hz^3+z^4)\,dz = \frac{R^4h}{20}$
- $\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\,d\varphi = \pi$
- $\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r\,dr = \frac{R^2}{2h^2}(h^2-2hz+z^2)$
- $\int_0^h z^2\left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r\,dr\right]dz = \frac{R^2}{2h^2}\int_0^h (h^2z^2-2hz^3+z^4)\,dz$
  $= \frac{R^2}{2h^2}\left[\frac{h^5}{3} - \frac{2h^5}{4} + \frac{h^5}{5}\right] = \frac{R^2}{2h^2}\left(\frac{h^5}{30}\right) = \frac{R^2h^3}{60}$
- $\int_0^{2\pi}d\varphi = 2\pi$

نعوض في (1) نجد:

$$I_x = \rho\frac{\pi R^2 h}{3}\frac{3R^2}{20} + \frac{\rho\pi R^2 h}{3}\frac{h^2}{10} = \frac{3MR^2}{20} + \frac{Mh^2}{10} = I_y$$

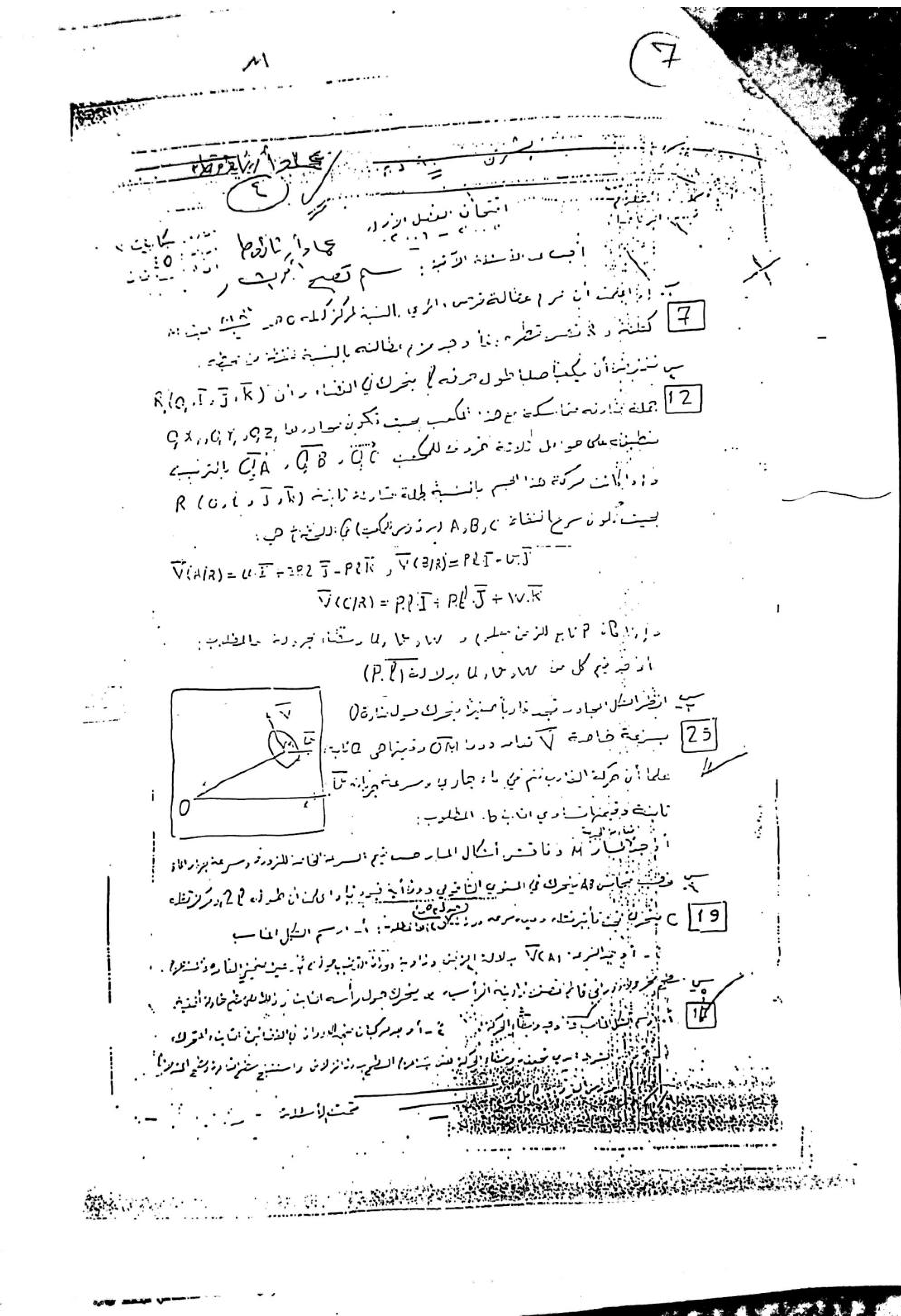
بسبب التناظر $I_x = I_y$

$$I_z = \rho\int_V r^3\,dr\,dz\,d\varphi = \rho\int_0^h\left[\int_0^{\frac{R}{h}(h-z)} r^3\,dr\right]dz\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{\rho 2\pi}{4}\int_0^h \frac{R^4}{h^4}(h-z)^4\,dz$$

$$= \frac{\rho\pi R^4}{2h^4}\int_0^h (h^4-4hz^3+6h^2z^2-4h^3z+z^4)\,dz = \frac{3\rho\pi R^2 h}{3}\frac{R^2}{10} = \frac{3M}{10}R^2 \;;\; M = \frac{\rho\pi R^2 h}{3}$$

ـ ه . ع .

عماد الأدرياوي ط
أبو بكر
بسلالم الميكانيك والعقري



امتحان الفصل الأول

أجب عن الأسئلة الآتية: سلم تصحيح

أ- إذا علمت أن تنسر عطالة ... بالنسبة لمركز ثقله C ... كتلته ... أوجد تنسر عطالته بالنسبة لنقطة من محيطه. [7]

ب- نفترض أن مكعباً صلباً طول حرفه ℓ يتحرك في الفضاء وأن $R_1(G,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ جملة مقارنة متماسكة مع هذا المكعب بحيث تكون محاورها Gx_1, Gy_1, Gz_1 منطبقة على حوامل ثلاثة أحرف للمكعب $\vec{GA}, \vec{GB}, \vec{GC}$ بالترتيب. وإذا كانت حركة هذا الجسم بالنسبة لجملة مقارنة ثابتة $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ بحيث تكون سرع النقاط A,B,C (رؤوس المكعب) في اللحظة t هي: [12]

$$\vec{V}(A/R) = u\vec{I} + 2P\ell\vec{J} - P\ell\vec{K} \quad , \quad \vec{V}(B/R) = P\ell\vec{I} - v\vec{J}$$

$$\vec{V}(C/R) = P\ell\vec{I} + P\ell\vec{J} + w\vec{K}$$

وإذا كانت P تابع للزمن مجهول، و w, v, u مقادير مجهولة، المطلوب:

أوجد قيم كل من w, v, u بدلالة $(P.\ell)$

ج- انظر الشكل المجاور نجد قرصاً ... يتحرك حول نقطة O بسرعة خاصة $\vec{V}$ ... $\vec{OM}$ وزاوية θ ثابتة، علماً أن حركة ... بسرعة زاوية $\vec{\omega}$ ثابتة ... المطلوب: [25]

أوجد ... M ... السرعة ... والتسارع ...

د- قضيب متجانس AB يتحرك في المستوي ... طوله 2ℓ ومركز ثقله C يتحرك ... المطلوب: أ- ارسم الشكل المناسب [19]

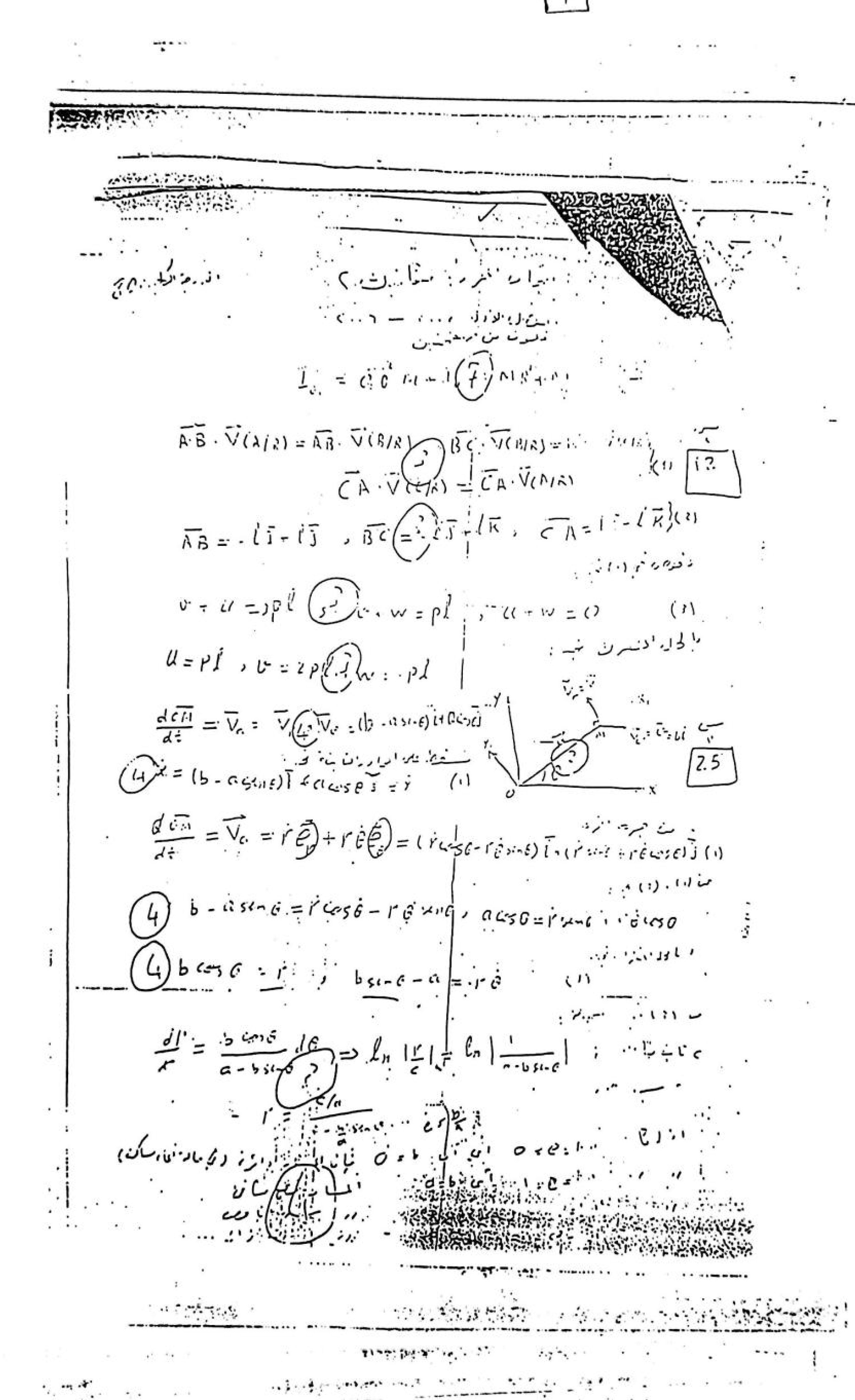
ب- أوجد السرعة $\vec{V}(A)$ بدلالة الزمن ...

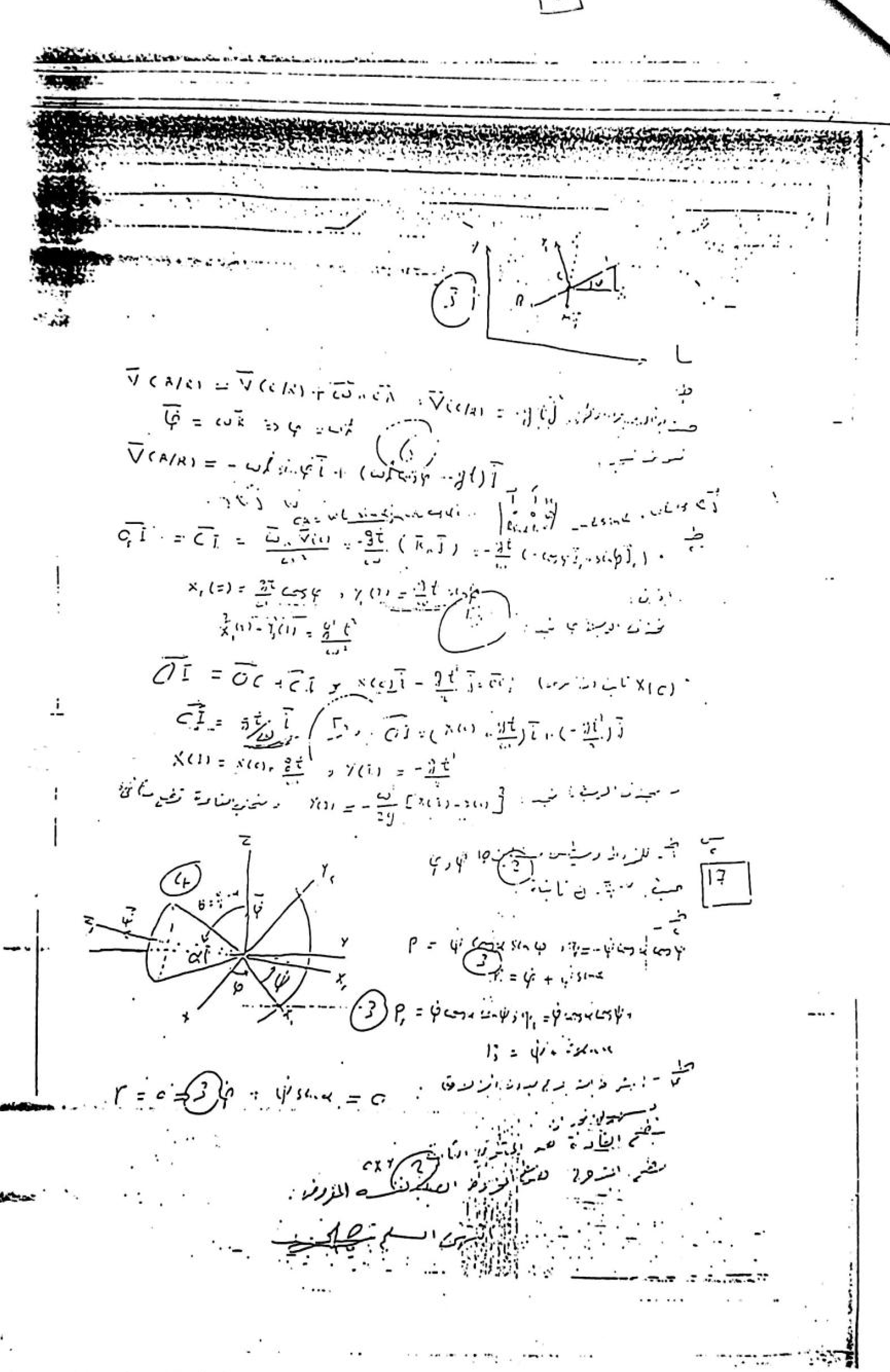
هـ- ... يتحرك حول رأسه الثابت ... [17]

أ- ارسم الشكل المناسب ... ب- أوجد ...

...

تمت الأسئلة




2
17
Z
Y